И.М.Смирнова, В.А.Смирнов

КРИВЫЕ, КАК ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК

Математика 2004 № 38

В статье [1] были рассмотрены кривые, как геометрические места точек. Еще одним способом образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки.

Рассмотрение этого способа получения кривых на уроках геометрии, предлагаемое в учебнике [2], не только позволяет расширить представления учащихся о кривых, но и способствует развитию мышления учащихся, проявлению их творческих математических способностей.

Одной из важнейших таких кривых является циклоида – траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся без скольжения по прямой. В переводе с греческого циклоида означает кругообразная, напоминающая о круге.

Найдем эту траекторию. Пусть окружность радиуса R катится по прямой a. C - точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рис. 1).

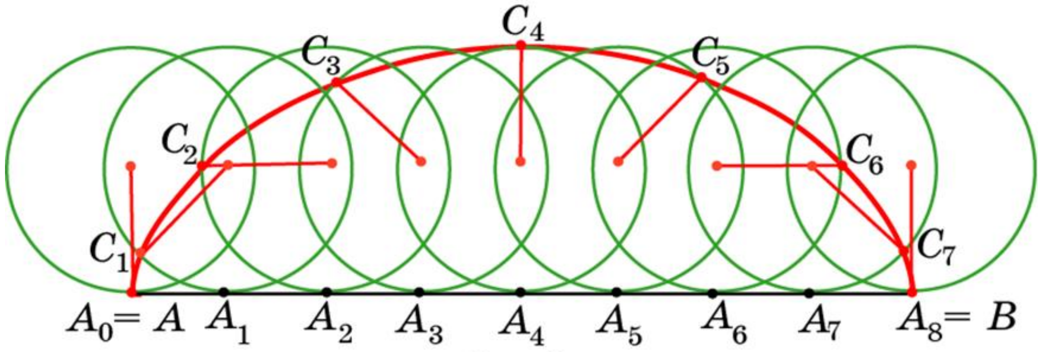

Рис. 1

Отложим на прямой a отрезок AB равный длине окружности, т.е. $AB = 2\pi R$. Разделим этот отрезок на 8 равных частей точками A_1, A_2, ..., $A_8 = B$.

Ясно, что когда окружность, катясь по прямой a, сделает один оборот, т.е. повернется на 360°, то она займет положение (8), а точка C переместится из положения A в положение B.

Если окружность сделает половину полного оборота, т.е. повернется на 180°, то она займет положение (4), а точка C переместится в самое верхнее положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 1 показаны также другие точки циклоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим участок циклоиды, соответствующий одному полному обороту окружности. При следующих оборотах будут получаться такие же участки, т.е. циклоида будет состоять из периодически повторяющегося участка, называемого аркой циклоиды.

Обратим внимание на положение касательной к циклоиде, например, в точке C_2. Оно показывает, что если велосипедист едет по мокрой дороге, то оторвавшиеся от колеса капли будут лететь не по касательной к колесу, а по касательной к циклоиде и при отсутствии щитков, могут забрызгивать спину велосипедиста.

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564 - 1642). Он же придумал и ее название.

Циклоида обладает целым рядом замечательных свойств. Упомянем о некоторых из них.

1. Часы с маятником. Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды: чем больше амплитуда, тем больше период. Голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629 - 1695) задался вопросом, по какой кривой должна двигаться точка, чтобы период ее колебаний не зависел от амплитуды. Заметим, что в обычном маятнике кривой, по которой движется точка, является окружность. Искомой кривой оказалась перевернутая циклоида. Если, например, в форме перевернутой циклоиды изготовить желоб и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды (рис. 2).

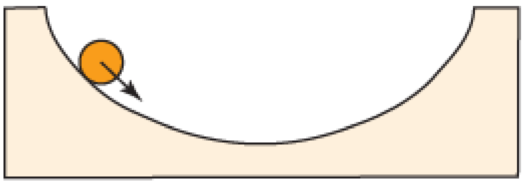

Рис. 2

За это свойство циклоиду называют также "таутохрона" - кривая равных времен.

2. Ледяная гора. В 1696 году И.Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки, чтобы скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время. Искомую кривую назвали "брахистохроной", т.е. кривой кратчайшего времени.

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г.Лейбниц, И.Ньютон, Г.Лопиталь и Я.Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является половина перевернутой циклоиды. Методы, развитые этими учеными при решении задачи о брахистохроне, положили начало новому направлению математики - вариационному исчислению.

Пусть теперь окружность катится без скольжения не по прямой, а по окружности с внешней стороны. В зависимости от соотношения между радиусами неподвижной и катящейся окружности будут получаться различные кривые. Рассмотрим некоторые из них.

Кардиоида – кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса.

Найдем эту траекторию. Пусть C - точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рис. 3). Разделим неподвижную окружность на 8 равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_8 = A$.

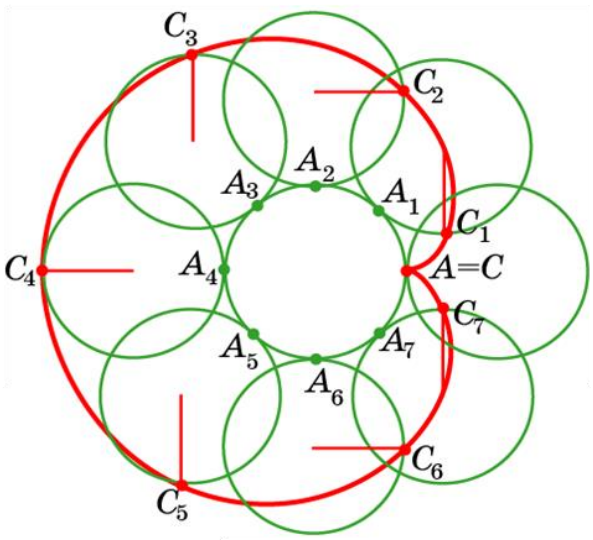

Рис. 3

Ясно, что когда окружность сделает один оборот, т.е. повернется на 360°, она займет исходное положение и точка C переместится в исходное положение.

Если окружность сделает половину полного оборота, т.е. повернется на 180°, то она займет положение (4), а точка C переместится в положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 3 показаны также другие точки кардиоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим кривую, соответствующую одному полному обороту окружности. При следующих оборотах окружности точка C будет описывать ту же самую кривую.

Рассмотрим случай, когда окружность катится по окружности с внутренней стороны и радиус неподвижной окружности в четыре раза больше радиуса катящейся окружности. Получаемая при этом траектория движения точки, закрепленной на катящейся окружности, называется астроидой (рис. 4).

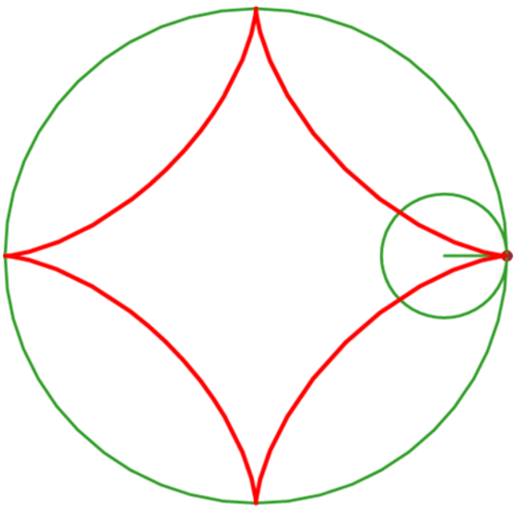

Рис. 4

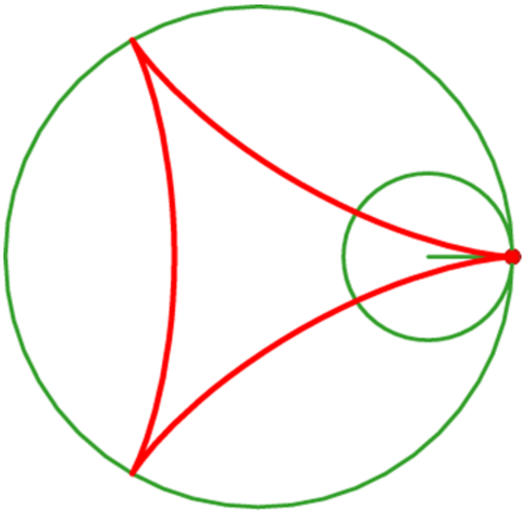

Рис. 5

Если окружность катится по окружности с внутренней стороны и радиус неподвижной окружности в три раза больше радиуса катящейся окружности, то получаемая при этом траектория движения точки, закрепленной на катящейся окружности, называется кривой Штейнера (рис. 5).

Дополнительно учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Пусть окружность катится по прямой. Нарисуйте кривую, которую описывает при этом точка закрепленная: а) на радиусе внутри окружности; б) на продолжении радиуса вне окружности. (Соответствующие кривые показаны на рисунках 6, 7).

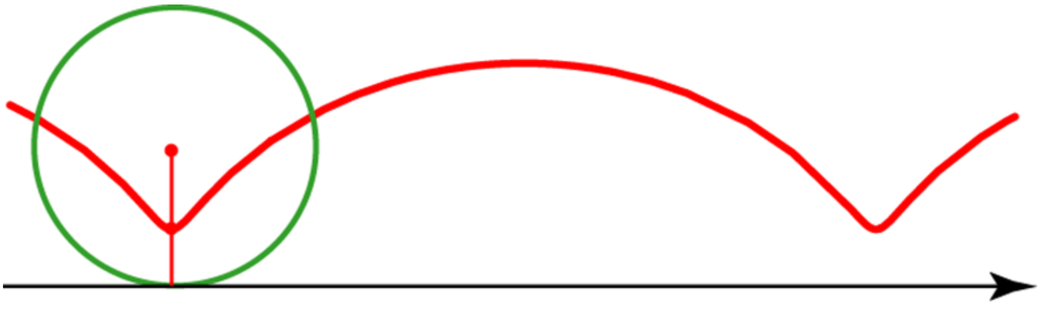

Рис. 6

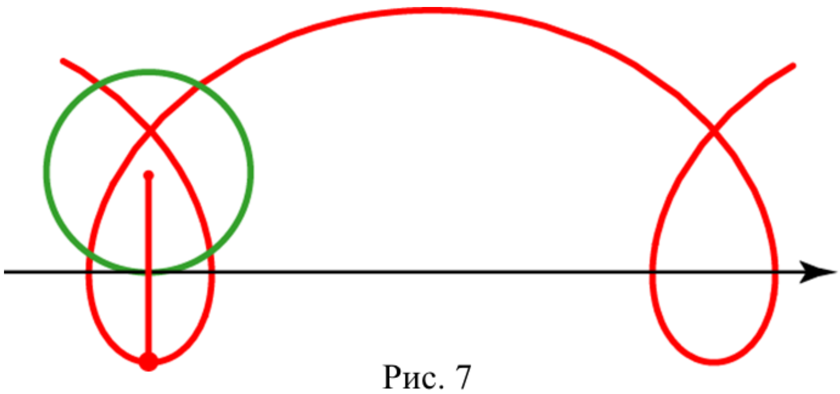

Рис. 7

2. Пусть окружность катится с внешней стороны по другой окружности того же радиуса. Нарисуйте кривую, которую описывает при этом точка закрепленная: а) на радиусе внутри катящейся окружности; б) на продолжении радиуса вне катящейся окружности. (Соответствующие кривые показаны на рисунках 8, 9).

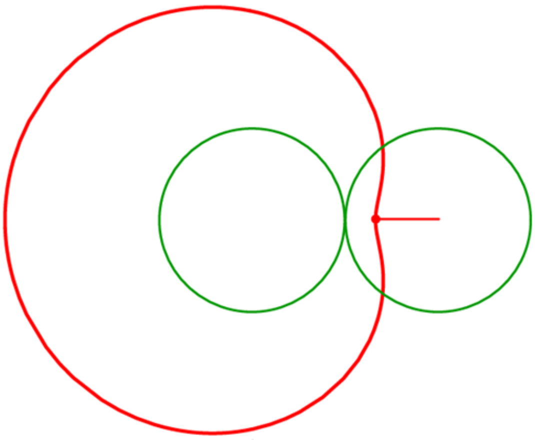

Рис. 8

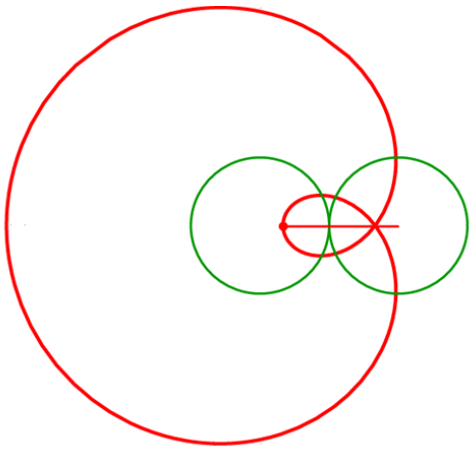

Рис. 9

3. Найдите траекторию движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внутренней стороны по другой окружности в два раза большего радиуса. (Отв. Диаметр)

Рассмотрим вопрос о том, как траектория движения точки описывается с помощью уравнений. Поскольку положение точки на плоскости однозначно определяется ее координатами, то для задания движения точки достаточно задать зависимости ее координат x, y от времени t, т.е. задать функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В этом случае для каждого момента времени t мы можем найти положение точки на плоскости.

Кривая на плоскости, описываемая точкой, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям, при изменении параметра t, называется параметрически заданной кривой на плоскости. Сами уравнения называются параметрическими уравнениями.

График функции $y=f(x)$ является частным случаем параметрически заданной кривой на плоскости. Параметрическими уравнениями в этом случае будут уравнения

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Найдем параметрические уравнения циклоиды. Пусть окружность катится по оси Ox и в начальный момент времени касается начала координат. Предположим, что окружность повернулась на некоторый угол величины t (рис. 10).

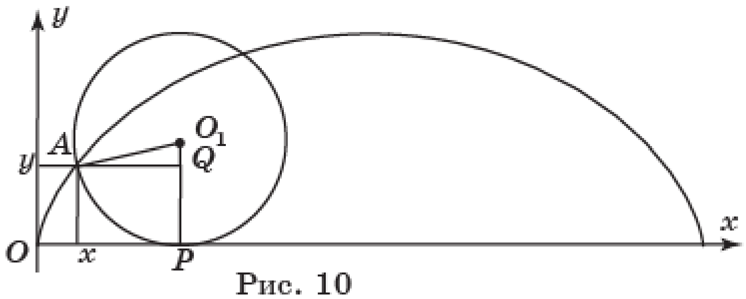

Рис. 10

При этом точка касания O на окружности переместится в точку A. Поскольку дуга AP окружности при этом прокатилась по отрезку A_0P, то их длины равны, т.е. $AP = OP = Rt$. Для координат x, y точки A имеем

$$x = OP - AQ = Rt - R\sin t = R(t - \sin t),$$
$$y = O_1P - O_1Q = R - R\cos t = R(1 - \cos t)$$

и, таким образом, параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

Разновидностью циклоиды являются траектории движения точки, закрепленной на радиусе окружности, или его продолжении, когда эта окружность катится по прямой.

Так же как и в случае с циклоидой показывается, что параметрическими уравнениями таких кривых являются

$$\begin{cases} x = Rt - d\sin t, \\ y = R - d\cos t, \end{cases}$$

где d – расстояние от точки до центра окружности.

Если $d < R$, то кривая называется укороченной циклоидой (рис. 6).

Если $d > R$, то кривая называется удлиненной циклоидой (рис. 7).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда точка закреплена на окружности, радиуса r, катящейся по окружности радиуса R. Получаемые кривые подразделяются на эпициклоиды и гипоциклоиды в зависимости от того, располагается ли катящаяся окружность с внешней или внутренней стороны. Выведем уравнения эпициклоиды.

Пусть центр O неподвижной окружности является началом координат и точка $A(0,R)$ соответствует начальному моменту времени. Предположим, что катящаяся с внешней стороны окружность повернулась на угол, равный t. При этом точка A переместилась в точку $A_1(x,y)$ (рис. 11). Обозначим отношение r/R через m. Из равенства длин дуг AB и A_1B следует, что угол AOB равен mt. Далее,

$$\angle A_1O_1C = \angle A_1O_1B - \angle CO_1O = t - (\pi/2 - mt).$$

и, следовательно,

$$\sin\angle A_1O_1C = \sin(t - (\pi/2 - mt)) = -\cos(t+mt),$$
$$\cos\angle A_1O_1C = \cos(t - (\pi/2 - mt)) = \sin(t+mt).$$

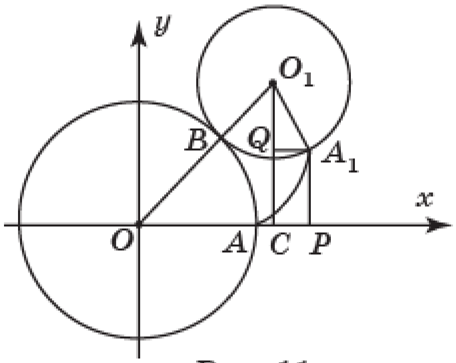

Рис. 11

Поэтому, уравнения эпициклоиды имеют вид

$$x = OP - OC = (R+mR)\cos mt - mR\cos(t+mt),$$
$$y = O_1C - O_1Q = (R+mR)\sin mt - R\sin(t+mt).$$

В частности, если m=1, получаем параметрические уравнения кардиоиды

$$x = 2R\cos t - R\cos 2t,$$
$$y = 2R\sin t - R\sin 2t.$$

Еще один частный случай эпициклоиды показан на рисунке 12 (m=3/5).

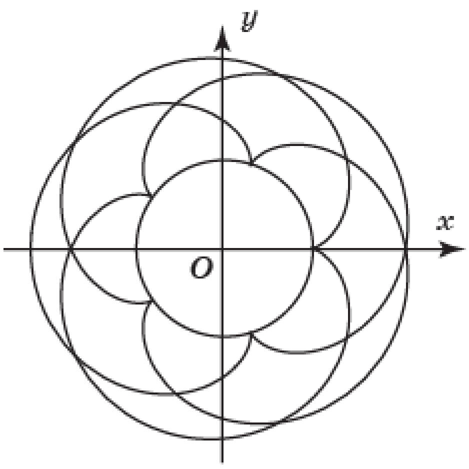

Рис. 12

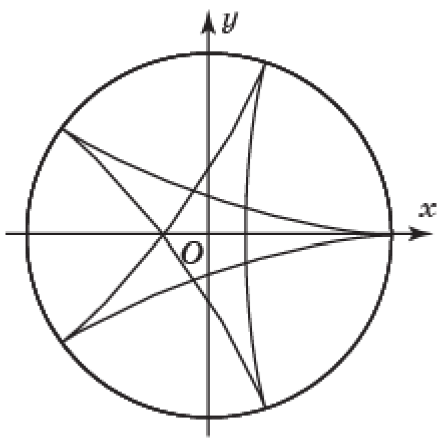

Рис. 13

Так же как и для эпициклоиды показывается, что уравнения гипоциклоиды имеют вид

$$x = (R\text{-}mR)\cos mt + mR\cos(t\text{-}mt),$$
$$y = (R\text{-}mR)\sin mt + \ R\sin(t\text{-}mt).$$

В частности, параметрические уравнения астроиды, рис. 4 (m=1/4), имеют вид

$$x = 3/4R\cos t/4 + 1/4R\cos 3t/4,$$
$$y = 3/4R\sin t/4 + 1/4R\sin 3t/4.$$

Параметрические уравнения кривой Штейнера, рис. 5 (m=1/3), имеют вид

$$x = 2/3R\cos t/3 + 1/3R\cos 2t/3,$$
$$y = 2/3R\sin t/3 + 1/3R\sin 2t/3.$$

Еще один частный случай гипоциклоиды показан на рисунке 13 (m=2/5).

Литература.

]. И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Кривые как геометрические места точек. //Математика в школе. – 2000. - № 4. – С. 67-72.

2. И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Геометрия: Учебник для 7-9 .лассов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение 2001.

3. И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Геометрия: Учебное пособие для 10-11 классов естественно-научного профиля. – М.: Просвещение 2001.