И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

Математика в школе 2012 № 9

В последнее время интерес к задачам с практическим содержанием существенно повысился. Они включаются в содержание ГИА и ЕГЭ по математике.

Рассмотрение на уроках геометрии геометрических задач с практическим содержанием позволяет:

– усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии;
– выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать величины и находить их приближенные значения;
– сформировать представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин;
– повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность обучения геометрии.

Однако результаты ГИА и ЕГЭ по математике показывают, что далеко не все учащиеся имеют необходимые геометрические представления и обладают умениями и навыками для решения геометрических задач с практическим содержанием.

Так, например, в одном из вариантов ЕГЭ по математике 2011 года была предложена следующая задача.

Задача. Воду, находящуюся в цилиндрическом сосуде на уровне 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, в два раза большего диаметра. На какой высоте будет находиться уровень воды во втором сосуде?

Правильный ответ (3 см) дали около 20% учащихся, и около 40% учащихся дали неправильный ответ (6 см).

Дело здесь, как нам представляется, не в незнании формул или в неумении вычислять значения геометрических величин с использованием формул. Основным фактором, приводящим к неправильному ответу, является недостаточная сформированность геометрических представлений учащихся.

В некотором смысле геометрические представления учащихся важнее знания конкретных формул. Формулы забываются, а геометрические представления остаются. Неправильные представления или отсутствие таковых могут приводить к неправильным ответам даже в том случае, когда учащиеся знают формулы.

Так для приведённой выше задачи большинство учащихся, давших неправильный ответ, знали формулу объёма цилиндра, однако их неправильные представления не позволили им правильно решить задачу.

Мы предлагали учащимся серию задач, в которых требовалось дать ответ, не производя вычислений по формулам, а исходя только из своих интуитивных представлений. Часто ответы оказывались далеки от правильных.

Приведем примеры таких задач.

Задача 1. Мякоть вишни окружает косточку толщиной, равной диаметру косточки. Считая шарообразной форму вишни и косточки, найдите отношение объема мякоти к объему косточки.

Ответы учащихся: 2; 4. Правильный ответ: 26.

Задача 2. Апельсин в два раза больше мандарина. Мандарин весит 40 г. Считая их форму шарообразной и удельный вес одинаковым, найдите вес апельсина.

Ответы учащихся: 80 г; 160 г. Правильный ответ: 320 г.

Задача 3. Сколько нужно взять медных шаров радиуса 2 см, чтобы из них можно было выплавить шар радиуса 6 см?

Ответы учащихся: 3; 9. Правильный ответ: 27.

Задача 4. Под каким примерным углом виден диск Луны?

Ответы учащихся: 5^{o}; 10^{o}. Правильный ответ: $0{,}5^{o}$.

Задача 5. Эйфелева башня в Париже высотой 300 м весит 8000000 кг. Некто захотел изготовить точную копию этой башни весом 1 кг. Какова будет высота этой модели? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответы учащихся: 10 см; 20 см. Правильный ответ: 150 см.

Действительно, коэффициент подобия равен кубическому корню из 8000000, т.е. равен 200. Высота модели будет равна 300:200=1,5 (м) = 150 (см).

Задача 6. Толщина газетного листа составляет 0,1 мм. Лист сложили пополам, потом ещё раз пополам и т.д. пока не сложили пополам пятьдесят раз. Какова толщина получившейся стопки из газетных листов?

Ответы учащихся: 10 см; 20 см. Правильный ответ: более одного миллиона км.

Действительно, при складывании пополам один раз толщина увеличивается в два раза. При складывании пополам 50 раз толщина увеличивается в 2^{50} раз. Учитывая, что $2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 > 1000^5 = 1000\,000\,000\,000\,000$, получаем, что толщина стопки будет больше 100 000 000 000 000 мм, или 100 000 000 км.

Вывод, который из этого нужно сделать, состоит в том, что на уроках геометрии следует больше внимания уделять решению геометрических задач с практическим содержанием, формированию представлений учащихся о геометрических величинах и соотношениях между ними. Желательно, чтобы на каждом уроке учащимся предлагались задачи с практическим содержанием. Для этого можно использовать книги А.П. Доморяда [1], Е.И. Игнатьева. [2], Б.А. Кордемского [3], Я.И. Перельмана [4], написанные в начале и середине прошлого века.

Большое внимание геометрическим задачам с практическим содержанием уделено в учебнике геометрии [5] и прилагаемых к нему методических рекомендациях для учителя [6] и дидактических материалах [7], в которых задачи с практическим содержанием распределены по отдельным темам.

Приведём некоторые из них.

Задачи на нахождение углов

1. Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

Ответ. 20^{o}.

2. Найдите угол между минутной и часовой стрелками часов в 5 часов.

Ответ. 150^{o}.

3. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за 10 минут?

Ответ. 60^{o}.

4. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за 10 минут?

Ответ. 5^{o}.

5. На сколько градусов повернётся Земля вокруг своей оси за 8 ч?

Ответ. 120^{o}.

6. Расстояние между Москвой и Вашингтоном, измеряемое по большой окружности поверхности Земли, примерно равно 7800 км. Найдите примерную градусную величину соответствующей дуги большой окружности, считая длину всей окружности равной 40000 км. В ответе укажите целое число градусов.

Ответ. 70^{o}.

7. Под каким углом человек видит ноготь своего указательного пальца (ширина ногтя примерно 1 см) на расстоянии вытянутой руки (примерно 60 см)? В ответе укажите целое число градусов.

Ответ. 1^{o}.

8. Под каким углом виден человек ростом 1 м 70 см на расстоянии 100 м от наблюдателя? В ответе укажите целое число градусов.

Ответ. 1^{o}.

9. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Найдите угол подъема в градусах. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.

Ответ. 2^{o}.

10. Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Расстояние от 11-метровой отметки до линии ворот равно 12 ярдам. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол, под которым видны ворота с 11-метровой отметки. В ответе укажите целое число градусов.

Ответ. 37^{o}.

Задачи на нахождение расстояний

1. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?

Ответ. 50 км.

2. В 12 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 11 м, а другой – 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.

Ответ. 13 м.

3. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. Найдите длину окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение одного часа. (Примите $\pi \approx 3$.)

Ответ. 21 м.

4. Два спортсмена должны пробежать один круг по дорожке стадиона, форма которого – прямоугольник с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Один бежит по дорожке, расположенной на 1 м дальше от края, чем другой. Какое расстояние должно быть между ними на старте, чтобы компенсировать разность длин дорожек, по которым они бегут? (Примите $\pi \approx 3$.)

Ответ. 6 м.

5. Москва и Новороссийск расположены примерно на одном меридиане под углами 56° и 44° северной широты соответственно. Найдите расстояние между ними по земной поверхности, считая длину большой окружности земного шара равной 40000 км. В ответе укажите целое число километров.

Ответ. 1333 км.

6. Используя данные, приведённые на рисунке 1, найдите расстояние *AB* от лодки *A* до берега *b*.

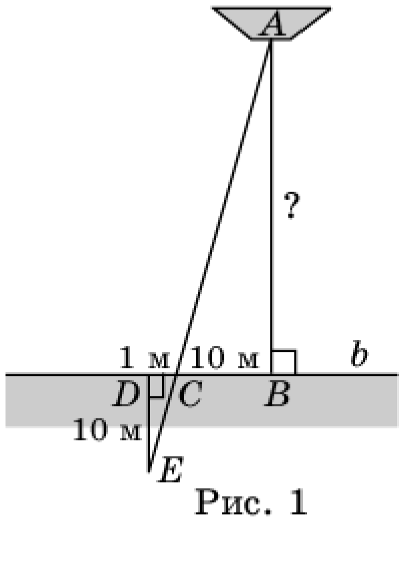

Рис. 1

Ответ. 100 м.

7. Расстояние от наблюдателя до башни главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова равно 150 м, а угол, под которым видно здание, равен 58°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту башни. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу метров.

Ответ. 240 м.

8. Высота Останкинской телевизионной башни – 540 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние от неё до человека, который видит башню под углом 32°. В ответе укажите целое число метров.

Ответ. 864 м.

9. Укажите способ нахождения высоты египетской пирамиды (вышки, здания и т.п.) по длине её тени.

10. Укажите способ нахождения расстояния между двумя недоступными объектами C и D (корабли в море, вершины гор и т.п.), которые видны из двух пунктов A и B (рис. 2), расстояние между которыми можно измерить.

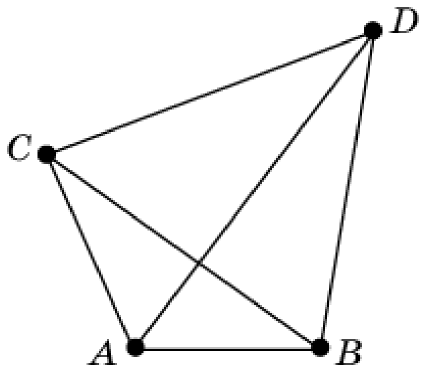

Рис. 2

Помимо практических задач на нахождение углов, длин, площадей и объёмов в учебнике [5] представлены:

– экстремальные задачи с практическим содержанием;

– задачи на разрезание;

– задачи на нахождение траекторий движения точек (циклоидальные кривые);

– задачи, связанные с уникурсальными графами, задача Эйлера о трёх домиках и трёх колодцах, задачи на раскрашивание карт.

Обычно экстремальные задачи, или задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, решаются в курсе алгебры и начал анализа старших классов с помощью производной.

Вместе с тем, имеется важный класс геометрических экстремальных задач, которые решаются своими методами без помощи производной.

Эти задачи, с одной стороны, имеют большое значение, как для математики, так и для её приложений, а с другой стороны, развивают геометрические представления учащихся, формируют необходимые умения и навыки решения экстремальных задач, могут служить пропедевтикой изучения соответствующих разделов курса алгебры и начал анализа.

Приведём примеры экстремальных задач с практическим содержанием.

Задача 1. Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону (рис. 3). Найдите такую точку C на прямой c, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая.

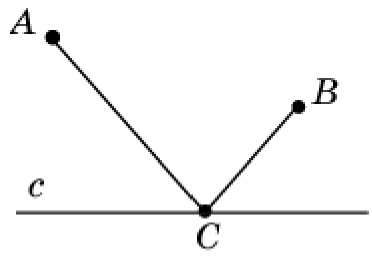

Рис. 3

Одна из возможных практических интерпретаций этой задачи состоит в следующем.

На одном берегу реки расположены два населённых пункта. В каком месте на берегу следует построить пристань и проложить от неё дороги к населённым пунктам, чтобы суммарная длина дорог была наименьшей?

Решение. Из точки B опустим на прямую c перпендикуляр BH и отложим отрезок HB', равный BH (рис. 4).

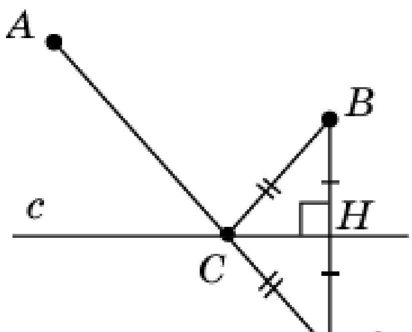

Рис. 4

Прямая c будет серединным перпендикуляром к отрезку BB' и, следовательно, для произвольной точки C на прямой c будет выполняться равенство $CB = CB'$. Поэтому сумма $AC + CB$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC + CB'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C принадлежат одной прямой, т.е. искомая точка C является точкой пересечения отрезка AB' с прямой c.

Задача 2. Для данного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая.

Одна из возможных практических интерпретаций этой задачи состоит в следующем.

Три соседа по дачным домикам решили вырыть общий колодец и проложить к нему дорожки от своих домиков. Укажите расположение колодца, при котором суммарная длина дорожек наименьшая.

Прежде чем непосредственно перейти к решению этой задачи, рассмотрим одну из замечательных точек треугольника – точку Торричелли.

Точкой Торричелли треугольника *ABC* называется такая точка *O*, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120° (рис. 5), т.е. углы *AOB, AOC* и *BOC* равны 120°.

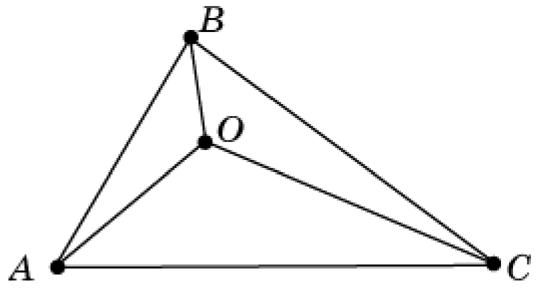

Рис. 5

Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше 120°, то точка Торричелли существует.

Выясним, что является геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под углом 120°. К этому времени учащиеся должны знать, что геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, является дуга окружности.

Для построения соответствующей дуги окружности на стороне *AB* треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник *ABC'* (рис. 6) и опишем около него окружность.

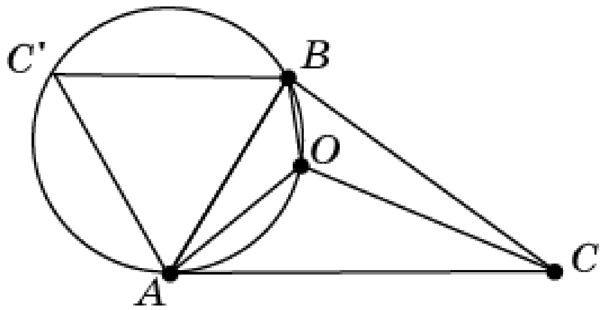

Рис. 6

Отрезок *AB* стягивает дугу этой окружности величиной 120°. Следовательно, точки этой дуги, отличные от *A* и *B*, обладают тем свойством, что отрезок *AB* виден из них под углом 120°.

Аналогичным образом на стороне *BC* треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник *BCA'* (рис. 7) и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные от *B* и *C*, обладают тем свойством, что отрезок *BC* виден из них под углом 120°.

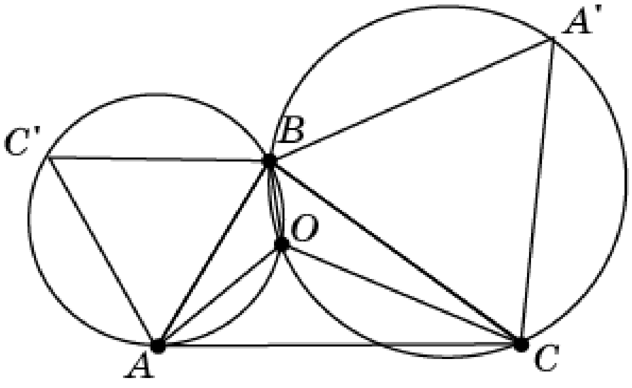

Рис. 7

В случае, если углы треугольника меньше 120°, то эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке *O* треугольника *ABC*. В этом случае $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$. Следовательно, $\angle AOC = 120^\circ$. Поэтому точка *O* является искомой.

В случае, если угол *B* равен 120°, то точкой пересечения дуг окружностей будет точка *B*. В этом случае точки Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны *AB* и *BC*.

В случае, если угол *B* больше 120°, то соответствующие дуги окружностей не пересекаются. В этом случае точки Торричелли также не существует.

Докажем теперь, что в случае, если углы треугольника меньше 120°, искомой точкой, сумма расстояний от которой до вершин треугольника, является точка Торричелли.

Повернём треугольник *ABC* вокруг вершины *C* на угол 60° (рис. 8).

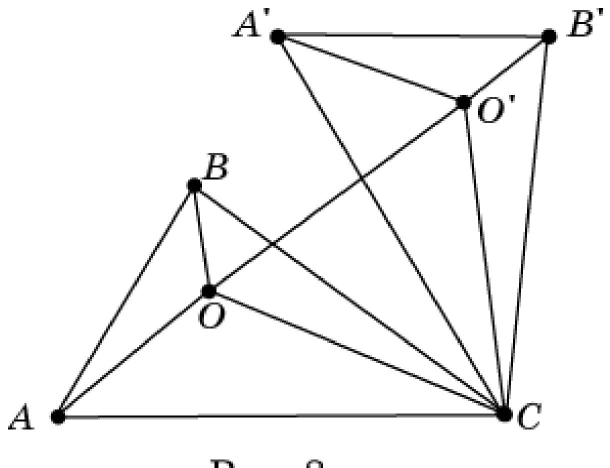

Рис. 8

Получим треугольник *A'B'C*. Возьмём произвольную точку *O* в треугольнике *ABC* . При повороте она перейдет в какую-то точку *O'*. Треугольник *OO'C* – равносторонний, так как *CO* = *CO'* и $\angle OCO' = 60^\circ$, следовательно, *OC* = *OO'*. Поэтому сумма длин *OA* + *OB* + *OC* будет равна длине ломаной *AO* + *OO'* + *O'B'*. Ясно, что наименьшее значение длина этой ломаной принимает в случае, если точки *A, O, O', B'* принадлежат одной прямой.

Если *O* – точка Торричелли, то это так. Действительно, $\angle AOC = 120°$, $\angle COO' = 60°$. Следовательно, точки *A, O, O'* лежат на одной прямой. Аналогично, $\angle CO'O = 60°$, $\angle CO'B' = 120°$. Следовательно, точки *O, O', B'* принадлежат одной прямой. Значит, точки *A, O, O', B'* принадлежат одной прямой.

В качестве самостоятельной исследовательской работы учащимся можно предложить доказать, что в случае, если один из углов треугольника больше или равен 120°, то решением задачи является вершина этого угла.

Задача 3. Населённые пункты *A* и *D* расположены на противоположных берегах реки (рис. 9). В каком месте реки следует построить мост *BC* и проложить дороги *AB* и *CD*, чтобы путь *AB* + *BC* + *CD* имел наименьшую длину? (Берега *b, c* реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам).

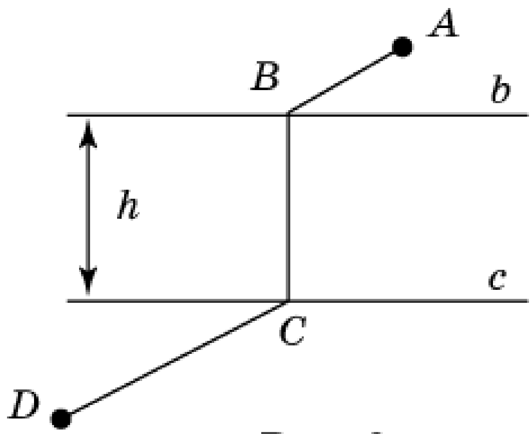

Рис. 9

Решение. Построим отрезок *AA'*, перпендикулярный *b* и равный *h*, где *h* – ширина реки (рис. 10). Если *BC* – искомый мост, то четырёхугольник *AA'CB* – параллелограмм и, следовательно, *AB* + *BC* + *CD* = *AA'* + *A'C* + *CD*. Путь *AA'* + *A'C* + *CD* имеет наименьшую длину, если *A'C* + *CD* имеет наименьшую длину. Это произойдёт в случае, если *A'*, *C* и *D* принадлежат одной прямой. Таким образом, для нахождения моста *BC* нужно: построить отрезок *AA'*, перпендикулярный *b* и равный *h*; провести прямую *A'D* и найти её точку пересечения *C* с прямой *c*; провести *BC* перпендикулярно *c*.

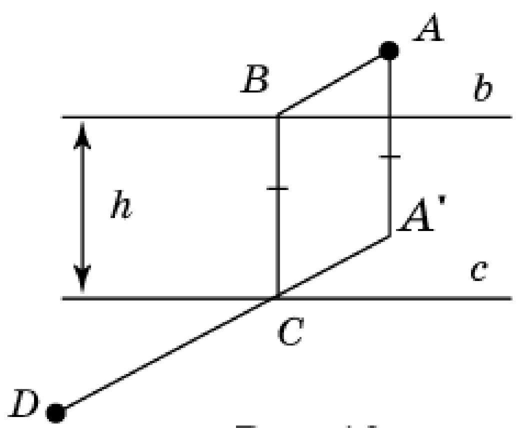

Рис. 10

Для подготовки к ГИА и ЕГЭ по математике в части геометрических задач с практическим содержанием можно использовать книгу [8].

Литература

1. Доморяд А.П. Математические игры и развлечения. – М.: Физ.-мат. лит., 1961.
2. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. – М.; 1923.
3. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – 9-е изд. – М.: Наука, 1991.
4. Перельман Я.И. Занимательная геометрия. – Д.: ВАП, 1994.
5. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия 7-9 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Мнемозина, 2011.
6. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 7, 8, 9 классы: Методические рекомендации для учителя. - М.: Мнемозина, 2007, 2010, 2011.
7. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Дидактические материалы по геометрии 7, 8, 9 классы. – М.: Мнемозина, 2005, 2007.
8. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрические задачи с практическим содержанием. – М.: МЦНМО, 2009.