В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ

Математика в школе 2018 № 7

Теорема о пропорциональных отрезках является одной из основных теорем школьного курса геометрии, на которую опирается доказательство многих теорем и решение задач.

Например, эта теорема используется при доказательстве теоремы о том, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

На неё опирается построение циркулем и линейкой четвёртого пропорционального отрезка.

Доказательство одной из важнейших теорем геометрии – теоремы Менелая, также использует теорему о пропорциональных отрезках.

В демоверсии ГИА по математике 2012 года была предложена следующая задача, решение которой связано с теоремой о пропорциональных отрезках.

Задача. Площадь треугольника ABC равна 40. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD : CD = 3 : 2$. Найдите площадь четырёхугольника $EDCK$.

В разных учебниках геометрии отношение к теореме о пропорциональных отрезках разное. Например, в учебнике [1] теорема о пропорциональных отрезках не содержится.

В учебнике [2] даётся следующая формулировка этой теоремы:

«Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, осекают от сторон этого угла пропорциональные отрезки.»

Таким образом, если стороны угла с вершиной A пересекаются двумя параллельными прямыми в точках B, C и D, E (рис. 1), то имеет место равенство

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}.$$

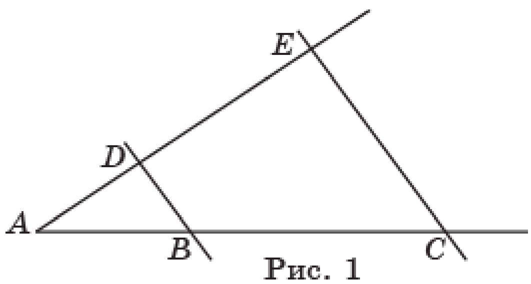

Рис. 1

При этом отношением $\frac{AB}{AC}$ отрезков AB и AC называется отношение их длин.

Доказательство этой теоремы занимает полторы страницы, однако не является вполне строгим, так как использует понятие отношения длин отрезков, т. е. отношение бесконечных десятичных дробей, которое в школьном курсе математики не определяется.

Здесь мы рассмотрим методику изучения теоремы о пропорциональных отрезках, опирающуюся на следующие принципы обучения [3, с. 171].

1. Принцип систематичности и последовательности, предполагающий соблюдение определённого порядка в рассмотрении учебного материала, движение от простого к сложному, постепенное овладение основными изучаемыми понятиями.

Последовательность в обучении математике означает, что обучение математике представляет собой цепочку последовательных шагов, каждый из которых дополняет известные учащимся знания и умения разумной дозой новых знаний и умений, которые, в свою очередь, становятся инструментом для приобретения учащимися новых знаний и умений.

2. Принцип доступности, заключающийся в том, чтобы изучаемый материал соответствовал возрастным особенностям учащихся; по своему содержанию и объёму был им посилен; применяемые методы обучения соответствовали развитию учащихся, были ориентированы на зону ближайшего действия.

В соответствии с этими принципами, прежде, чем формулировать и доказывать теорему о пропорциональных отрезках, следует рассмотреть подводящие к ней понятия и теоремы, среди которых теоремы о средних линиях треугольника и трапеции, теорема Фалеса.

В учебнике [1] теорема о средней линии рассматривается после темы «Подобные треугольники» и доказывается с использованием признаков подобия треугольников. На наш взгляд, такая последовательность изложения учебного материала не вполне соответствует принципу систематичности и последовательности. Кроме того, поскольку доказательство признаков подобия в этом учебнике использует понятие площади, а вывод формулы площади квадрата использует понятие действительного числа и предельный переход, то получается, что доказательство теоремы о средней линии треугольника не является вполне строгим.

В то же время имеется простое доказательство теоремы о средней линии треугольника, использующее признак параллелограмма и не использующее ни понятия действительного числа и площади, ни предельный переход.

Теорема. (О средней линии треугольника.) Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и его среднюю линию DE, соединяющую середины стороны AC и BC (рис. 2).

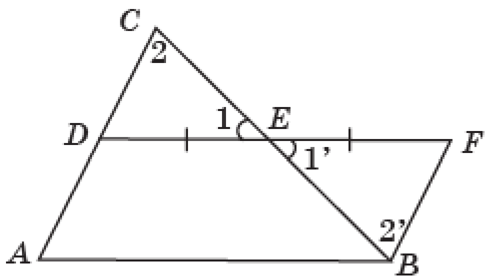

Рис. 2

Докажем, что отрезок DE параллелен стороне AB и равен её половине. Отложим на прямой DE отрезок $EF = DE$ и соединим отрезком точки B и F. Треугольники ECD и EBF равны по первому признаку равенства треугольников ($CE = BE$ по условию, $DE = FE$ по построению, $\angle 1 = \angle 1'$, как вертикальные). Следовательно, $BF = CD$, значит, $BF = AD$. Так как угол 2 равен углу 2’, то прямые AC и BF параллельны. Таким образом, стороны AD и BF четырёхугольника $ABFD$ равны и параллельны. Следовательно, этот четырёхугольник – параллелограмм (по признаку параллелограмма). Значит, сторона AB параллельна и равна стороне DF. Средняя линия DE равна половине стороны DF и, следовательно, равна половине стороны AB.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной стороны треугольника и параллельна другой его стороне, то она проходит через середину третьей стороны этого треугольника.

Доказательство. Пусть прямая проходит через середину D стороны AC и параллельна стороне AB треугольника ABC. Так как средняя линия DE также параллельна стороне AB, то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина E стороны BC принадлежит этой прямой.

Эти теорему и следствие мы рекомендуем рассматривать после изучения параллелограмма, его признаков и свойств.

То же самое относится и к теореме о средней линии трапеции. В учебнике [1] эта теорема доказывается векторным методом после тем «Подобие треугольников» и «Векторы». Мы рекомендуем рассматривать эту теорему после теоремы о средней линии треугольника при изучении трапеции.

Теорема. (О средней линии трапеции.) Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и её среднюю линию EF. Проведём прямую DF. Обозначим G её точку пересечения с прямой AB (рис. 3).

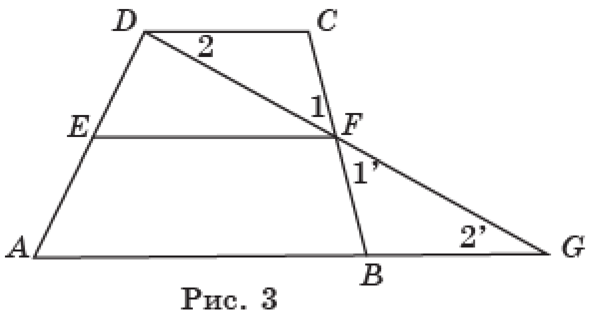

Рис. 3

Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = BF$ по условию, $\angle 1 = \angle 1'$, как вертикальные, $\angle 2 = \angle 2'$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB, CD и секущей DG). Из равенства этих треугольников следует, что равны отрезки DF и GF. Значит, EF - средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника получаем, что отрезок EF параллелен AB и равен половине отрезка AG. Так как $AB \parallel CD$, то отрезок EF будет параллелен обоим основаниям трапеции. Так как отрезок AG равен сумме оснований трапеции, то отрезок EF будет равен полусумме оснований трапеции.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной боковой стороны и параллельна основанию трапеции, то она проходит через середину второй боковой стороны этой трапеции.

Доказательство. Пусть прямая проходит через середину E стороны AD и параллельна стороне AB трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Так как средняя линия EF также параллельна стороне AB, то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина F стороны BC принадлежит этой прямой.

Следующим шагом, подводящим к теореме о пропорциональных отрезках, является теорема Фалеса. Её доказательство использует теорему о средней линии трапеции.

В учебнике [1] эта теорема предлагается в качестве задачи до рассмотрения средней линии трапеции. По-видимому, понимая трудность решения этой задачи, авторы после формулировки помещают и её решение, доступность которого вызывает большие сомнения и много вопросов. Так, если это задача, то зачем помещать её решение, если это теорема, то зачем помещать её в задачах.

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство. Рассмотрим угол со сторонами a, b. Пусть три параллельные прямые пересекают стороны этого угла соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 (рис. 4).

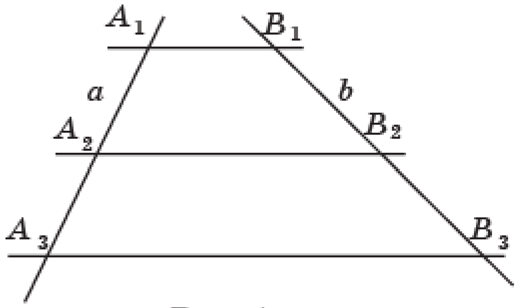

Рис. 4

Если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 равны, то A_2B_2 – средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$. Следовательно, равны и отрезки B_1B_2 и B_2B_3.

Приступим теперь к формулировке и доказательству теоремы о пропорциональных отрезках.

Определим понятие отношения отрезков. Для этого напомним определение длины отрезка.

Для измерения длины отрезка AC сначала выбирают отрезок OE, длина которого принимается за единицу (единичный отрезок). Затем последовательно откладывают единичный отрезок OE на луче AC от вершины A. Если при этом единичный отрезок целиком укладывается в отрезке AC целое число раз без остатка, то процесс измерения заканчивается и полученное число считается длиной отрезка AC.

В случае, если единичный отрезок OE целиком укладывается в отрезке AC с остатком, т. е. конец C_1 последнего единичного отрезка не совпадает с концом C отрезка AC, и остаток C_1C меньше единичного отрезка, то полученное число n считается приближённым значением длины отрезка (с точностью до 1).

В этом случае отрезок OE разбивается на 10 равных частей. На луче C_1C от вершины C_1 последовательно откладывают одну десятую часть отрезка OE и находят число m, показывающее, сколько раз эта часть укладывается в отрезке C_1C. Если при этом конец C_2 последнего отрезка совпадет с концом C отрезка AC, то процесс измерения заканчивается и число, выражаемое десятичной дробью n,m считается длиной отрезка AB.

В случае, если конец C_2 последнего отрезка не совпадает с концом C отрезка AC, то число n,m считается приближённым значением длины отрезка (с точностью до 0,1).

В этом случае одна десятая часть единичного отрезка разбивается на десять равных частей и повторяется описанная выше процедура.

В результате процесс измерения длины отрезка может на некотором шаге закончиться. В этом случае длина отрезка будет выражаться конечной десятичной дробью. В случае, если процесс измерения не заканчивается ни на каком шаге, то длина отрезка будет выражаться бесконечной десятичной дробью.

При измерении длины отрезка единичный отрезок можно разбивать не только на 10, но и на другое число частей. В случае, если единичный отрезок разбит на n равных частей и одна такая часть укладывается в отрезке AB ровно m раз, то длиной отрезка AB считается число $\frac{m}{n}$.

Положительное число, показывающее, сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке, называется длиной отрезка.

Для определения отношения $\frac{CD}{AB}$ отрезков CD и AB примем отрезок AB за единичный. Отношением $\frac{CD}{AB}$ называется длина отрезка CD, т. е. число, показывающее, сколько раз отрезок AB и его части укладываются в отрезке CD.

Говорят, что отрезки AB, CD пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1, если равны их отношения, т. е. $\frac{CD}{AB} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1}$.

Теорема. (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной A, стороны которого пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и D, E (рис. 5).

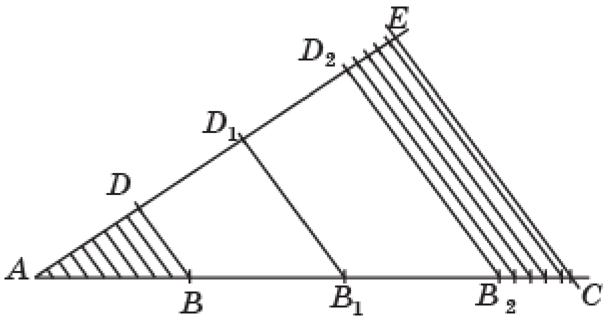

Рис. 5

Докажем, что имеет место равенство

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

Отношение $\frac{AC}{AB}$ показывает, сколько раз отрезок AB и его части укладываются в отрезке AC. Отношение $\frac{AE}{AD}$ показывает, сколько раз отрезок AD и его части укладываются в отрезке AE. Используя теорему Фалеса, установим соответствие между процессами измерения длин отрезков AC и AE. Прямые, параллельные BD, переводят равные отрезки на прямой AC в равные отрезки на прямой AE. Отрезку AB соответствует отрезок AD. Одной десятой части отрезка AB соответствует одна десятая часть отрезка AD и т. д. Таким образом, если отрезок AB и его части укладываются в отрезке AC k раз, то отрезок AD и его части будут укладываться в отрезке AE также k раз, т. е. $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = k$.

Следствие. Если стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и D, E, то имеют место равенства

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}, \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}.$$

Докажем, например, первое равенство. Заметим, что имеют место равенства

$$AC = AB + BC \text{ и } AE = AD + DE.$$

Подставляя их в равенство

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

получим равенство

$$1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{DE}{AD},$$

из которого вытекает и требуемое равенство.

Используя это следствие, докажем следующее важное свойство биссектрисы треугольника и теорему Менелая.

Теорема. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и его биссектрису CD (рис. 6).

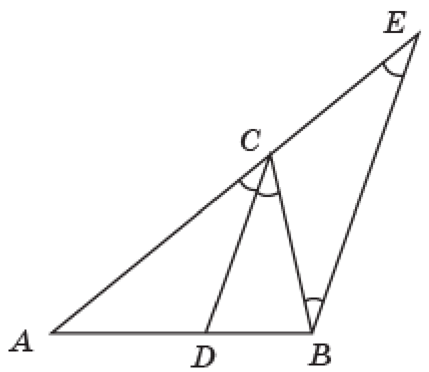

Рис. 6

Докажем, что выполняется равенство $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$. Через вершину B проведём прямую, параллельную прямой CD. Обозначим E её точку пересечения с продолжением стороны AC данного треугольника. Углы CBE и BCD равны как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BE, CD и секущей BC. Углы BEC и DCA равны как соответственные углы при параллельных прямых BE, CD и секущей CE. Следовательно, в треугольнике BEC угол B равен углу E. Значит, треугольник BEC равнобедренный, $BC = EC$. По следствию из теоремы о пропорциональных отрезках, имеем $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE} = \frac{AC}{BC}$.

Теорема Менелая. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Докажем только необходимость. Именно она используется при решении задач. Доказательство достаточности можно посмотреть, например, в учебнике [4, с. 136].

Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой (рис. 7).

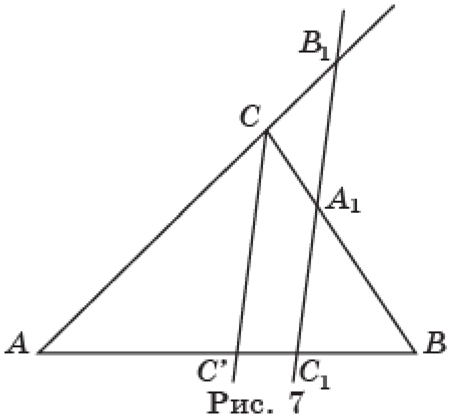

Рис. 7

Докажем, что выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Через вершину C проведём прямую, параллельную данной прямой, и обозначим C' её точку пересечения со стороной AB треугольника ABC.

Тогда имеют место равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BC_1}{C_1C'},\ \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{C'C_1}{C_1A}.$$

Перемножая эти равенства, получим равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC_1}{C_1A},$$

равносильное требуемому равенству.

Эта теорема позволяет решать задачи на нахождение отношения, в котором прямая, пересекающая две стороны треугольника, делит одну из них или продолжение третьей стороны.

При этом важным является не формальное применение доказанного равенства, а использование самого метода доказательства.

Проиллюстрируем его на примере решения задачи, сформулированной в начале статьи.

Через точку K проведём прямую, параллельную прямой AD, и обозначим L её точку пересечения со стороной BC треугольника ABC (рис. 8).

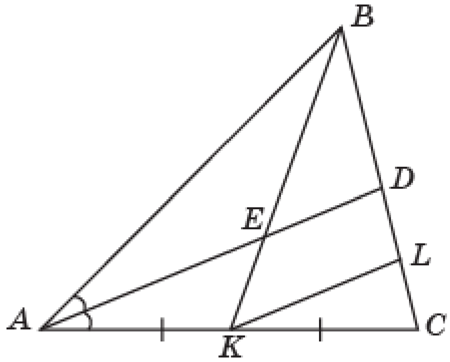

Рис. 8

Тогда отрезок KL является средней линией треугольника ADC, следовательно, $DL = LC$. Так как $BD : DC = 3 : 2$, то $BD : DL = 3 : 1$. Значит, $BE : EK = 3 : 1$. Таким образом,

$$BD = \frac{3}{5}BC, BE = \frac{3}{4}BK.$$

Площадь треугольника BCK равна половине площади треугольника ABC, т. е. равна 20. Площадь треугольника BDE равна $\frac{9}{20}$ площади треугольника BCK, т. е. равна 9. Следовательно, площадь четырёхугольника $EDCK$ равна 11.

Заметим, что это решение значительно короче и проще, чем решение, предложенное в демоверсии.

Приведём решение ещё одной олимпиадной задачи.

Задача. Точки A_1, B_1 и C_1 делят стороны BC, CA и AB в отношении 1 : 2 (рис. 9). Найдите площадь треугольника $A'B'C'$, ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

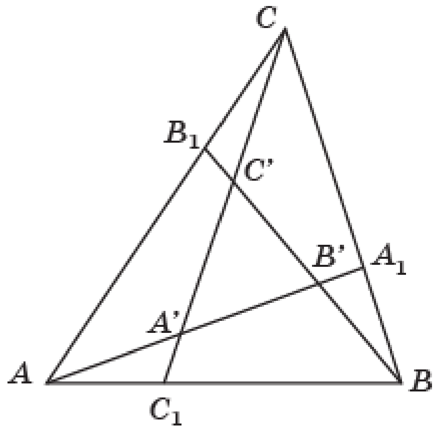

Рис. 9

Решение. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна площади треугольника ABC минус площади треугольников $AB'B$, $BC'C$, $CA'A$. Для нахождения площади треугольника $CA'A$ проведём отрезок C_1D параллельный прямой AA_1 (рис. 10).

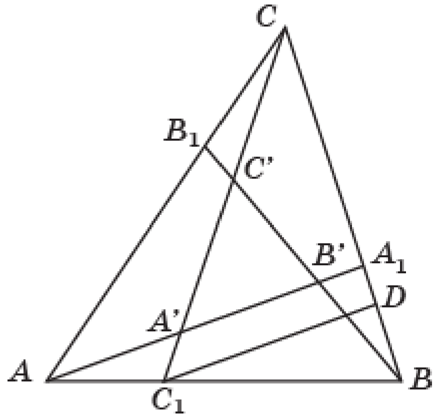

Рис. 10

Тогда $A_1D : DB = 1 : 2$, $A'C_1 : CA' = A_1D : CA_1 = 1 : 6$. Значит, площадь треугольника $CA'A$ равна $\frac{6}{7}$ площади треугольника ACC_1 и равна $\frac{2}{7}$. Треугольники $AB'B$ и $BC'C$ имеют такую же площадь. Следовательно, площадь треугольника $A'B'C'$ равна $\frac{1}{7}$.

Литература

1. *Атанасян Л. С. и др.* Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.

2. *Погорелов А. В.* Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2012.

3. *Колягин Ю. М. и др.* Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособие для студентов физико-матнматических факультетов педагогических институтов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1980.

4. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрия. 11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2014.