И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

О РАЗВИТИИ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе». Москва, МПГУ, 4-5 декабря 2018 г.

Под критическим мышлением будем понимать способ мышления, при котором человек ставит под сомнение любую информацию, и даже собственные убеждения, использует методы познания, которые отличаются контролируемостью, обоснованностью и целенаправленностью [1].

Это согласуется с высказываниями великого французского философа и математика Рене Декарта, который считал, что только принцип «Сомневайся во всём» в состоянии помочь нам познать мир.

Сегодня критическое мышление необходимо каждому человеку в связи с огромным потоком информации, распространяемым через средства массовой информации, интернет и т. п.

Задача развития критического мышления учащихся является одной из важных задач обучения, в частности, математике. К сожалению, в школе этому вопросу уделяется крайне мало внимания.

В то же время, задачи, использующие критическое мышление, предлагаются на основном государственном экзамене (ОГЭ) и на едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике.

Отметим, что в середине прошлого века было издано несколько замечательных книг, посвящённых: ошибкам в математических рассуждениях, например, [2], [3]; зрительным иллюзиям [4]; софизмам [5] и др.

Мы предлагаем включать в обучение геометрии задачи из этих книг, а также другие задачи на формирование следующих умений учащихся, которые, на наш взгляд, будут способствовать развитию их критического мышления.

1. Распознавать конфигурации геометрических фигур по их изображениям и описаниям.
2. Избегать ошибок в оценке геометрических величин.
3. Устанавливать некорректность формулировок, истинность и ложность утверждений.
4. Понимать, на какие аксиомы, свойства и теоремы опирается доказательство данного утверждения.
5. Находить ошибки в формулировках и доказательствах.
6. Приводить контрпримеры.

Приведём примеры таких задач, распределённые по классам.

7 класс

1. Не используя линейку, скажите, какие две линии a и b или a и c на рисунке 1 изображают одну и ту же прямую. Ответ проверьте с помощью линейки.

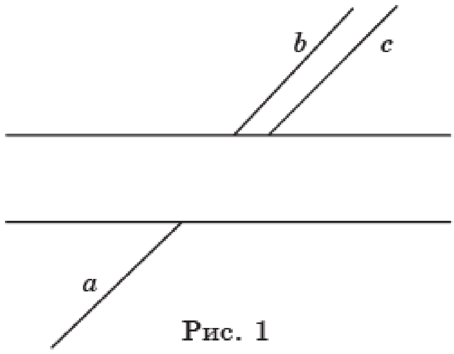

Рис. 1

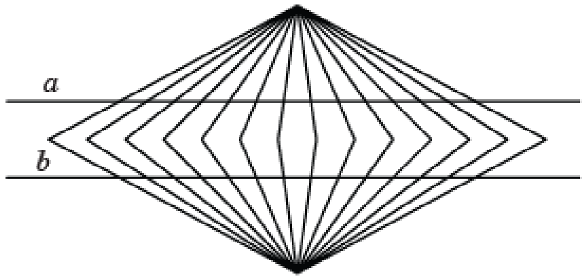

Рис. 2

Ответ. Линии a и c изображают одну и ту же прямую.

2. Не используя линейку, скажите, являются ли линии a и b, изображённые на рисунке 2, прямыми или нет. Ответ проверьте с помощью линейки.

Ответ. Линии a и b являются прямыми.

3. Сравните отрезки AB и CD, изображённые на рисунке 3.

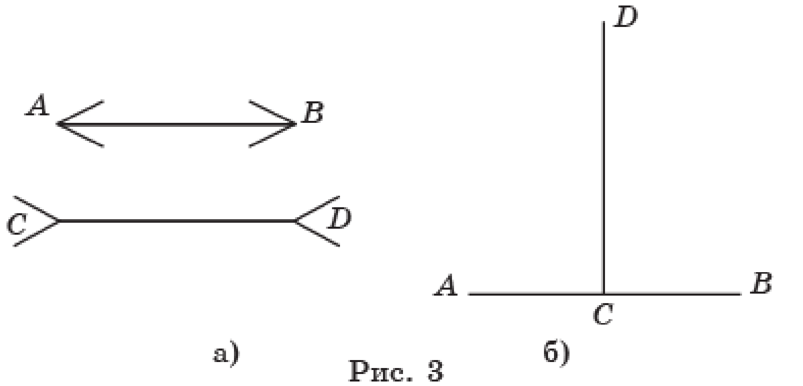

Рис. 3

Ответ. Отрезки AB и CD равны.

4. Найдите ошибку в доказательстве следующего утверждения.

Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

«Доказательство». Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 4).

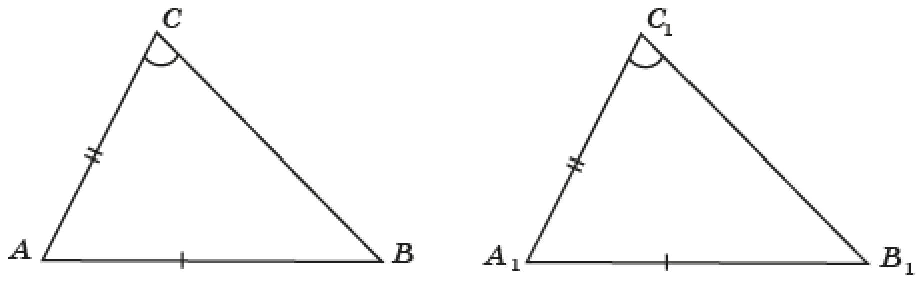

Рис. 4

Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 5).

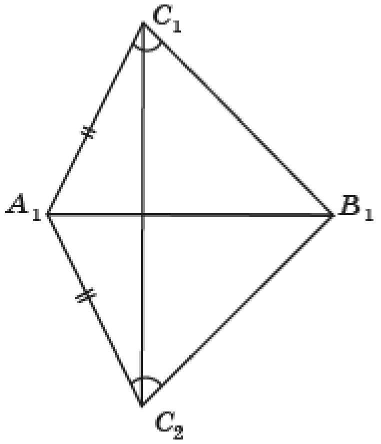

Рис. 5

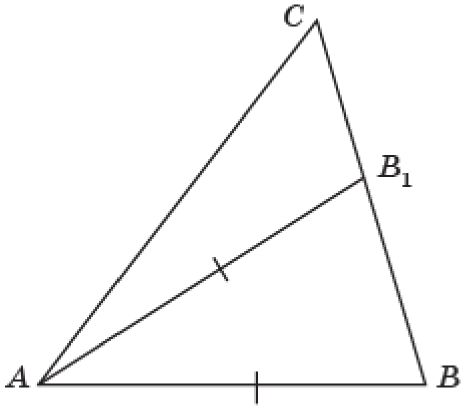

Рис. 6

Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ равнобедренный, значит, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Из этого и равенства углов C_1 и C_2 следует равенство углов $B_1C_1C_2 = B_1C_2C_1$. Значит, треугольник $B_1C_1C_2$ равнобедренный. Следовательно, его стороны B_1C_1 и B_1C_2 равны. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1C_1 = A_1C_2$, $B_1C_1 = B_1C_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

На самом деле, это утверждение неверно. Пример приведён на рисунке 6. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них $AB = AB_1$, AC – общая сторона, угол C общий.

5. Верно ли, что если две стороны и высота, проведённая из их общей вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой из их общей вершины другого треугольника, то такие треугольники равны.

Ответ. Нет, неверно. Пример приведён на рисунке 7. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них AC – общая сторона, $BC = B_1C$, CH – общая высота.

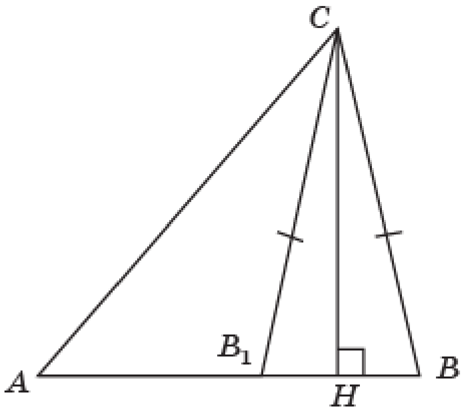

Рис. 7

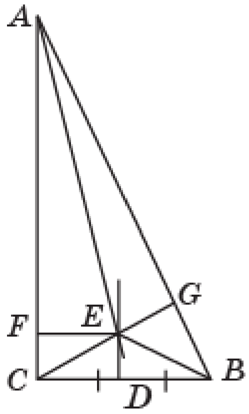

Рис. 8

6. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что гипотенуза прямоугольного треугольника равна его катету.

Пусть ABC – прямоугольный треугольник (угол C – прямой) (рис. 8). Докажем, что гипотенуза AB равна катету AC.

Проведём биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC. Обозначим через E их точку пересечения. Соединим отрезками точку E с вершинами B и C. Из точки E опустим перпендикуляры EF и EG соответственно на стороны AC и AB треугольника ABC. Так как точка E принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку BC, то отрезки BE и CE равны. Так как точка E принадлежит биссектрисе угла A, то отрезки EF и EG равны. Прямоугольные треугольники BEG и CEF равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки BG и CF равны. Прямоугольные треугольники AEG и AEF равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки AG и AF равны. Складывая отрезки AG и BG, AF и CF, получаем равенство гипотенузы AB и катета AC.

7. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что прямой угол равен тупому углу.

Пусть $ABCD$ – четырёхугольник (рис. 9), в котором $AD = BC$, угол D прямой, угол C тупой. Докажем, что углы D и C равны. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Обозначим через G их точку пересечения. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle GDF = \angle GCF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ADG = \angle BCG$. Вычитая из второго равенства углов первое, получаем равенство углов *ADC* и *BCD*, т. е. получаем, что прямой угол *ADC* равен тупому углу *BCD*.

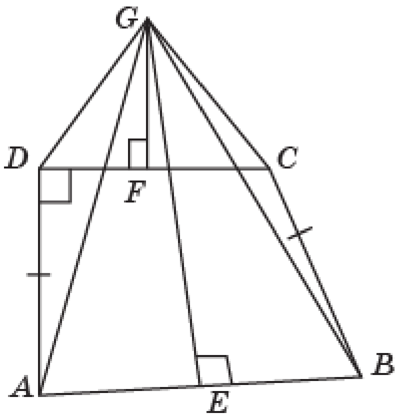

Рис. 9

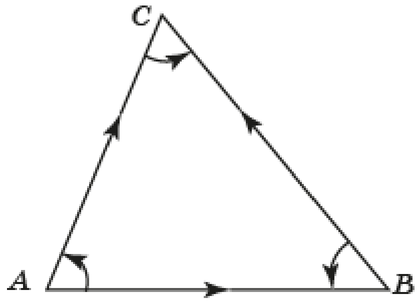

Рис. 10

8. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что сумма углов треугольника равна 180°.

Рассмотрим треугольник *ABC* (рис. 10). Зададим на прямой *AB* (направление указано стрелкой). Повернём прямую *AB* вокруг точки *A* на угол *A*. Она перейдёт в прямую *AC*. Повернём прямую *AC* вокруг точки *C* на угол *C*. Она перейдёт в прямую *BC*. Повернём прямую *BC* вокруг точки *B* на угол *B*. Она перейдёт в прямую *BA* с направлением противоположным начальному направлению прямой *AB*. Таким образом, прямая *AB* повернулась на 180°. С другой стороны, этот поворот на 180° складывается из поворотов на углы *A*, *B* и *C*. Следовательно, сумма углов *A*, *B* и *C* треугольника *ABC* равна 180°.

Ошибка в этом «доказательстве» связана с тем, что оно не использует аксиому параллельных, а без этого данное утверждение неверно. Например, оно неверно в геометрии Лобачевского.

8 класс

8. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны, то две другие стороны параллельны.

Пусть *ABCD* – четырёхугольник, у которого равны стороны *AD* и *BC* (рис. 11).

Проведём серединные перпендикуляры к сторонам *AB* и *CD*. Если они параллельны, то стороны *AB* и *CD* параллельны, так как они будут перпендикулярны параллельным прямым. Если эти серединные перпендикулярны не параллельны, то обозначим через *G* их общую точку.

Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$, $\angle AGE = \angle BGE$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle DGF = \angle CGF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle AGD = \angle BGC$. Так как сумма всех рассмотренных углов равна 360°, то из равенства их пар следует, что сумма углов AGE, AGD и DGF равна 180°. Значит, серединные перпендикуляры совпадают. В этом случае стороны AB и CD будут перпендикулярны одной прямой, следовательно, параллельны.

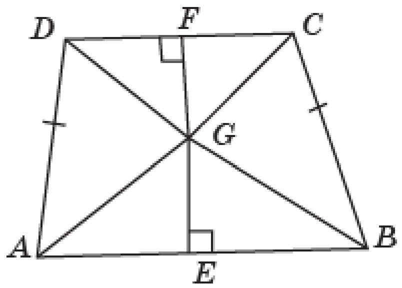

Рис. 11

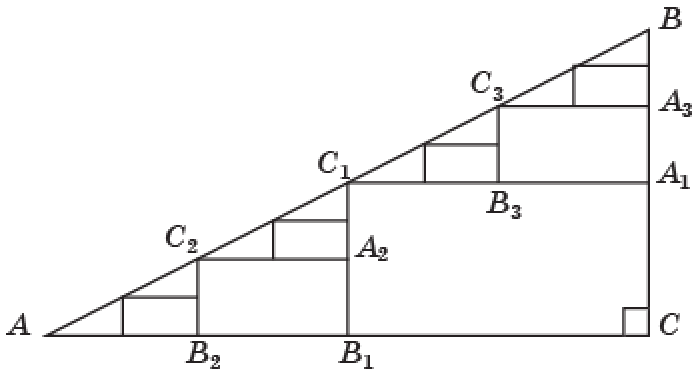

Рис. 12

9 класс

9. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна длине его гипотенузе.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C – прямой) (рис. 12). Из середины C_1 гипотенузы AB опустим перпендикуляры C_1A_1 и C_1B_1 соответственно на катеты BC и AC. Длина ломаной $AB_1C_1A_1B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Из середин C_2, C_3 отрезков соответственно AC_1, C_1B опустим перпендикуляры C_2A_2, C_2B_2, C_3A_3, C_3B_3 на соответствующие катеты прямоугольных треугольников AB_1C_1, C_1A_1B. Длина ломаной $AB_2C_2A_2C_1B_3C_3A_3B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Продолжая этот процесс, будем получать ломаные, приближающиеся к гипотенузе. Длины этих ломаных будут стремиться к длине гипотенузы. Так как длины этих ломаных остаются равными сумме длин катетов AC и BC, то длина гипотенуза AB будет равна сумме длин катетов AC и BC.

Этот метод «доказательства», на первый взгляд, аналогичен тому, как определяется длина окружности. Разница состоит в том, что в определении длины окружности берутся правильные многоугольники, вписанные в окружность, т. е. все их вершины принадлежат окружности, а в предложенном «доказательстве» ломаные не являются вписанными в гипотенузу. Именно это и даёт неверный результат.

10. Одна сторона треугольника равна 5. Синус угла, прилежащего к этой стороне, равен 0,6. Высота, проведённая из вершины этого угла, равна 4, Найдите сторону треугольника, противолежащую этому углу.

Трудность в решении этой задачи состоит в том, что для указанных данных возможны два треугольника ABC и ABC_1, изображённые на рисунке 13. Для них $AB = 5$, $\sin A = 0{,}6$, высоты AC и AG равны 4.

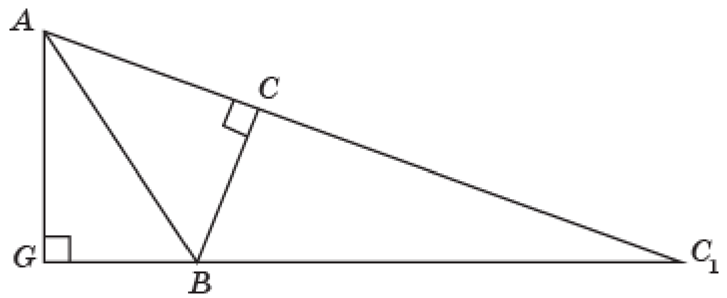

Рис. 13

Легко видеть, что для треугольника ABC $BC = 3$. Обозначим через x сторону BC_1 треугольника ABC_1. Из подобия треугольников BCC_1 и AGC_1 получаем равенство $\frac{BC_1}{BC} = \frac{AC_1}{AG}$. Следовательно, имеем уравнение $\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{4}$. Решая его, находим $x = 10\frac{5}{7}$. Значит, $BC_1 = 10\frac{5}{7}$.

Ответ. Сторона треугольника равна 3 или $10\frac{5}{7}$.

11. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что «64 = 65».

Рассмотрим квадрат со стороной, равной 8. разрежем его на части, как показано на рисунке 14, а. Сложим из этих частей прямоугольник (рис. 14, б). Его площадь равна 65. Следовательно, «64 = 65».

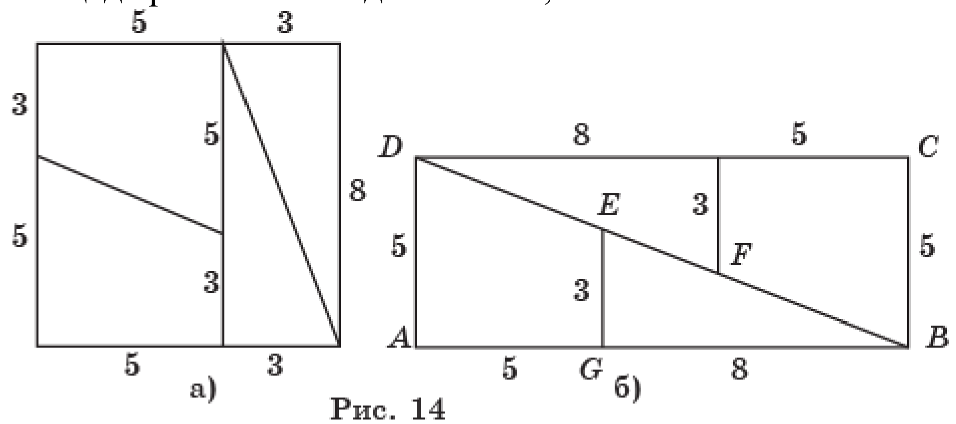

Рис. 14

На самом деле, точки D, E, F, B не принадлежат одной прямой. Если бы это было так, то треугольники ABD и GBE были бы подобны. Следовательно, выполнялось бы равенство $\frac{AD}{AB} = \frac{GE}{GB}$, которое не выполняется, т. к. $\frac{5}{13} \neq \frac{3}{8}$. Четырёхугольник $DEBF$ не содержится в фигуре б). Он является параллелограммом, площадь которого равна 1.

10 класс

11. Как в пространстве расположены прямые *DE* и *FG* (рис. 15)?

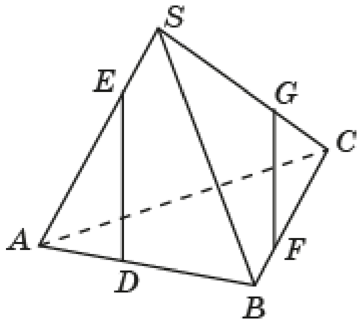

Рис. 15

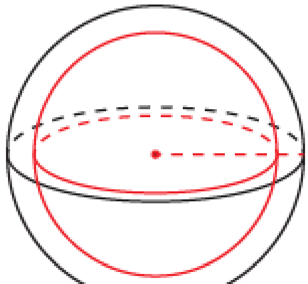
Рис. 16

Ответ. Скрещиваются.

11 класс

12. Толщина кожуры апельсина составляет одну пятую его радиуса (рис. 16). Оцените, какую часть объёма апельсина занимает его кожура.

Решение. Мякоть апельсина имеет форму шара, радиус которого равен $\frac{4}{5}$ радиуса апельсина. Следовательно, объём мякоти составляет $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} \approx 0{,}5$ апельсина. Значит, объём кожуры также составляет половину объёма апельсина.

Литература

1. Халперн Д. Психология критического мышления. – М.- СПб.: Питер, 2000.
2. Брадис В. М. и др. Ошибки в математических рассуждениях. – М.: Учпедгиз, 1959.
3. Уемов А. И. Логические ошибки. – М.: Госполитиздат, 1958.
4. Литцман В. Где ошибка? –М.: Физматлит, 1962.
5. Мадера А. Г., Мадера Д.А. Математические софизмы. – М.: Просвещение, 2003.