И.М. Смирнова,
В.А. Смирнов

ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Монография

2022

НОЧУ ДПО «ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»
МЕЖДУНАРОДНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Монография

Москва, 2022

УДК 51(072,8)
ББК 22.1.73
И 66

Печатается по решению Учёного совета НОЧУ ДПО «Институт развития образовательных технологий» (НОЧУ ДПО ИРОТ) и РИС Международной академии наук педагогического образования (МАНПО).

Рецензент: Утеева Р.А., *доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета.*

Научный редактор: Новикова Г.П., *заслуженный деятель науки, доктор педагогических наук, доктор психологических наук, профессор, академик Международной академии наук педагогического образования, академик Российской академии естественных наук.*

Редакционный совет: Г.П. Новикова, Н.А. Маноилова.

Смирнова И.М., Смирнов В.А.

И 66 **Инновационные подходы в обучении геометрии:** Монография. – Ярославль-Москва: Канцлер, 2022. – 146 с.

ISBN 978-5-907590-37-3

В книге представлены актуальные вопросы обучения геометрии, отражающие основные направления модернизации образования. Особое внимание уделяется историческим аспектам и психолого-педагогическим основам, даётся теория построения курса геометрии в современной школе, ориентированного на реализацию принципов гуманизации, гуманитаризации, формирование личности школьников, индивидуализацию и дифференциацию обучения.

УДК 51(072,8)
ББК 22.1.73

ISBN 978-5-907590-37-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

«Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период… Все вокруг – геометрия»
Ле Корбюзье

ВВЕДЕНИЕ

Успех проводимой в нашей стране модернизации образования во многом зависит от правильного определения роли и места каждого школьного предмета в новых, быстро меняющихся, условиях. Приняты Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего образования и среднего общего образования, соответствующие примерные рабочие программ. В них определены приоритетные направления развития школы, среди которых выделяются принципы гуманизации, гуманитаризации, личностно-ориентированного обучения, направленные на формирование личности школьников, реализацию их задатков, склонностей, способностей, интересов и других индивидуальных особенностей.

В реализации этих принципов большую роль играет школьный курс геометрии. Как известно, именно геометрия знакомит учащихся с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения, формирует необходимые представления, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем нас мире. Она даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. Кроме этого, геометрия способствует приобретению нужных практических навыков в изображении, моделировании, конструировании, в измерении. Наконец, геометрия сама по себе очень увлекательный предмет, так как имеет яркую историю, глубокие приложения, в том числе в кристаллографии, искусстве – живописи, архитектуре, строительстве; изучает красивые геометрические фигуры и т.д.

В предлагаемой книге представлены актуальные вопросы обучения геометрии, отражающие основные направления модернизации образования. Особое внимание уделяется роли геометрии в современном образовании подрастающего поколения; историческим аспектам становления и развития отечественной системы геометрического образования; психолого-педагогическим основам обучения геометрии и развитию критического мышления учащихся. Рассматриваются различные подходы к построению курса геометрии в 5–6, 7–9 и 10–11 классах. Большое внимание уделено использованию задач с практическим содержанием, организации различных видов деятельности обучающихся, таких как проектная, исследовательская, метапредметная, коммуникативная.

Надеемся, что книга будет полезной учителям математики, преподавателям, студентам, магистрантам и аспирантам математических факультетов педагогических вузов.

1. ГЕОМЕТРИЯ КАК ОСНОВА ОБУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТАМ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОГО ЦИКЛА

На протяжении многих веков геометрия служила основой не только математики, но и других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии. Многие геометрические задачи способствовали появлению новых научных направлений и, наоборот, решение многих научных проблем было получено с использованием геометрических методов.

Так, задача об измерении длины отрезков привела к открытию Пифагором несоизмеримых отрезков и в дальнейшем к построению действительных чисел.

Задачи об измерении длины окружности, площади круга, объёмов шара и пирамиды привели древнегреческих учёных к понятию предела и заложили основы интегрального исчисления.

Задачи нахождения уравнения касательной к кривой и вычисления площади криволинейной трапеции привели Г. Лейбница и И. Ньютона к созданию дифференциального и интегрального исчислений.

Геометрические методы изображения пространственных фигур стали фундаментом живописи, изобразительного искусства.

Задача о нахождении орбит космических тел оказалась связанной и была решена с помощью конических сечений.

Задача Эйлера о Кёнигсбергских мостах положила начало новым направлениям геометрии – теории графов, топологии.

Разработка методов решения задач оптимального управления стала возможной благодаря развитию геометрических методов, в том числе теории многогранников.

Функциональный анализ, один из современных разделов математического анализа, опирается на понятие бесконечномерного линейного пространства, обобщающего понятие евклидова пространства.

Одно из основных понятий современной алгебры – понятие группы, возникло на основе геометрических понятия симметрии.

Группы симметрий играют важную роль не только в математике, но и физике, химии, биологии, кристаллографии и других науках.

Современные представления о Вселенной описываются на языке геометрии с помощью понятия многообразия.

В последние десятилетия активно развивается алгебраическая геометрия – раздел математики, изучающий алгебраические структуры геометрическими методами. В частности, решение проблемы Ферма было недавно получено с использованием глубоких геометрических методов.

В связи с развитием компьютерной техники, возникли и бурно развиваются новые направления геометрии, например, компьютерная геометрия, 3D-моделирование.

Вообще современная наука и её приложения немыслимы без геометрии и её новых направлений, таких как топология, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, компьютерная геометрия и др.

Неслучайно все последние научные открытия, так или иначе, связаны с геометрией. Многие из них сделаны отечественными учёными. Так, например, гипотезу Пуанкаре доказал наш соотечественник Г. Перельман. Абелевская премия по математике 2009 года была присуждена М. Громову за выдающийся вклад в геометрию. Нобелевская премия по физике 2010 года была присуждена К. Новосёлову и А. Гейму за открытие и исследование свойств графена, молекулы которого расположены в вершинах паркета из правильных шестиугольников. Филдсовская премия по математике 2010 года присуждена С. Смирнову за результаты, связанные с фрактальной геометрией. Нобелевская премия по химии 2011 года присуждена израильскому учёному Д. Шехтману за открытие квазикристаллов, строение которых имеет форму мозаик Р. Пенроуза. Абелевская премия 2011 года присуждена американскому учёному Д.У. Милнору за открытия в области дифференциальной геометрии и топологии.

Геометрия это не только современный раздел математики, но и элемент общей культуры человека, который вносит неоценимый вклад в развитие мышления, воображения, исследовательских способностей.

Она в равной степени нужна математику, физику, химику, биологу, врачу, инженеру, архитектору, художнику и т.п. Это связано с тем, что в равной степени необходимо развивать рациональные и иррациональные психические функции человека. К первым, например, относится мышление, ко вторым – воображение, интуиция. Для любого человека важно заботиться о равномерном развитии как левого, так и правого полушарий головного мозга. Как известно, левое связано с развитием логического, а правое – художественного мышления. Если одно из них не будет развито, из человека не получится гармонично развитой личности. Геометрия представляет для этого как раз богатые возможности.

Об этом говорили и говорят многие видные учёные-математики. Например, ещё Н.Ф. Четверухин в статье «Геометрические характеристики причины трудности узнавания геометрических фигур на чертеже» (Математика в школе. – 1965. – № 4) подчёркивал важность развития пространственных представлений для всех учащихся вне зависимости от направления их дальнейшего образования и выбора будущей профессии. «Хорошее пространственное воображение нужно конструктору, создающему новые машины, геологу, разведывающему недра земли, архитектору, сооружающему здания современных городов, хирургу, производящему тончайшие операции среди кровеносных сосудов и нервных волокон, скульптору, художнику и т.д.».

А.Д. Александров, говоря о целях преподавания геометрии, в статье «О геометрии» (Математика в школе. – 1980. – № 3) указывал, что «особенность геометрии, выделяющая её среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга».

В.Г. Болтянский в статье «Математическая культура и эстетика» (Математика в школе. – 1982. – № 2) говорил о том, что природа геометрии предоставляет богатые возможности для воспитания у школьников эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова. Красота геометрии заключается в её проявлениях в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д., а также в смелых, оригинальных, нестандартных доказательствах, выводах и решениях.

Великий Анри Пуанкаре считал, что отличительной чертой математического ума является не логичность, а эстетичность.

Он также полагал, что чувство эстетического у нас врождённое, но его непрерывно нужно совершенствовать в себе. Люди, которые способны совершенствовать в себе умение ценить красоту математики, становятся теоретиками-математиками. «Единственными фактами, способными обратить на себя внимание и быть полезными, являются те, которые приводят нас к познанию математического закона. Таким образом, мы приходим в следующему выводу: полезные комбинации это в точности наиболее красивые, т.е. те, которые больше всего воздействуют на это специальное чувство математической красоты, известное всем математикам» [4].

Многие удивительно красивые пространственные формы придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы – природные многогранники.

Свойства кристаллов, которые изучаются на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решётке. Формы правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Неслучайно говорят, что пирамида Хеопса – немой трактат по геометрии, а греческая архитектура – внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она попрежнему остаётся грамматикой архитектора».

Отечественной школой накоплен уникальный опыт преподавания геометрии. Учебник по геометрии А.П. Киселёва под редакцией Н.А. Глаголева [3] на протяжении десятилетий оставался образцом строгости, чёткости и доступности изложения геометрии.

Задача обучения геометрии состоит в том, чтобы, опираясь на достигнутый отечественной школой уровень геометрического образования, сделать обучение геометрии современным и интересным, учитывающим склонности и способности учеников, направленным на формирование математической культуры, интеллектуальное развитие личности каждого ученика, его творческих способностей, формирование представлений учащихся о математике, её месте и роли в современном мире.

Литература:

1. *Александров А.Д.* О геометрии // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56.

2. *Болтянский В.Г.* Математическая культура и эстетика // Математика в школе. 1982. № 3. С. 40.

3. *Киселёв А.П.* Геометрия / под ред. Н.А. Глаголева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4. *Пуанкаре А.* Математическое творчество / Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. М.: Просвещение, 1982. С. 141.

5. *Четверухин Н.Ф.* Геометрические характеристики причины трудности узнавания фигур на чертеже // Математика в школе. 1965. № 4. С. 13.

2. СТАНОВЛЕНИЕ РОССИЙСКОГО УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ

Система светского государственного образования стала складываться в России в XVIII веке, во времена правления Петра I. В начале своей государственной деятельности, направленной на коренную реорганизацию страны, он столкнулся с отсутствием знающих людей, способных претворить в жизнь новые идеи. Первой реформой, с которой начал царь, была реформа образования. Если проследить дальнейшую историю государства российского, то отчётливо станет видно, что реформы социальных революций, значительных перестроек всегда сопровождались у нас, как правило, реформами образования.

Одной из первых школ нового типа была открытая в 1701 году в Москве знаменитая школа «*математических и навигацких, т.е. мореходно-хитростных наук*». Помещалась она в Сухаревской башне (снесённой в тридцатых годах двадцатого столетия). Среди предметов математического цикла изучались: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия – плоская и сферическая. В качестве учебника по геометрии использовалась историческая книга «*Начала*» Евклида. Её перевод был сделан Фарварсоном. Это англичанин, известный профессор Аббердинского университета, который был приглашён Петром I в навигацкую школу для преподавания математики и морских наук.

Здесь проявилась характерная тенденция, которая определила преподавание геометрии в России приблизительно до конца XVIII века. Во-первых, система преподавания геометрии пришла из Западной Европы, а во-вторых, в качестве учебника фигурировали «Начала» Евклида. Эта книга в то время считалась непревзойдённым образцом изложения геометрии, а потому по ней велось обучение в различных школах. Ввиду важности этого произведения и того влияния, которое оно оказала на учебную литературу по геометрии, остановимся на нём более подробно.

Напомним, историки математики считают, что «Начала» были написаны Евклидом около 300 г. до н. э. Они состоят из 13 основных книг. Первые шесть (книги I–VI) посвящены планиметрии; VII–IX – арифметике; X – несоизмеримым отрезкам, XI–XIII – стереометрии. По планиметрии изучаются: учение об отрезках, о сторонах и углах треугольника; построение треугольников, перпендикулярных и параллельных прямых на плоскости; параллелограммы; площади треугольников и параллелограммов; теорема Пифагора. Излагается учение об окружности и круге; о секущих и касательных; об углах, образуемых ими; о вписанных и описанных многоугольниках. Строятся правильные многоугольники: четырёхугольник, пятиугольник, шестиугольник и 15-угольник. Даётся понятие подобных фигур. По стереометрии рассматриваются начала параллельности и перпендикулярности в пространстве, определяется отношение объёмов пирамид и других тел, причём, используется метод исчерпывания, даётся теория правильных многогранников.

Это выдающееся произведение положило начало дедуктивному способу изложения, который заключается в том, что, прежде всего, даётся перечень основных понятий и всех аксиом. Затем формулируются теоремы и для каждой из них приводится доказательство, даются определения всех вновь вводимых понятий. Например, первая книга начинается с 23 определений. Среди них такие:

1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия есть длина без ширины.

3. Границы линии суть точки.

4. Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.

5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6. Границы поверхности суть линии.

7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.

8. Угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости, но не расположенных на одной прямой.

……………………………………………………………………

23. Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются.

Затем идут постулаты.

Требуется:

I. Чтобы из каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую неограниченную прямую можно было продолжать неограниченно.

III. И чтобы из каждой точки, как из центра, можно было произвольным радиусом описать окружность.

IV. И чтобы все прямые углы были равны друг другу.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Наконец, аксиомы:

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.

III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.

IV. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.

V. И если удвоим равные, то получим равные.

VI. И половины равных равны между собой.

VII. И совмещающиеся (величины, образы) равны между собой.

VIII. И целое больше части.

IX. И две прямые линии не могут заключить пространства.

Исходя из этого, Евклид развил и представил геометрическую теорию, всё доказывая логическим путём, без ссылок на наглядность и очевидность. Эта книга оказала огромное и длительное (почти 2000 лет) влияние на науку и культуру цивилизованных народов. По ней изучали математику Н. Коперник, Г. Галилей, Р. Декарт, И. Ньютон, Г. Лейбниц, Л. Эйлер, М.В. Ломоносов, Н.И. Лобачевский и многие другие выдающиеся учёные. О значении этой книги можно судить, например, по следующему высказыванию известного итальянского математика XVI века Д. Кардано: «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что никакое другое сочинение по справедливости нельзя с ними сравнивать. В них отражается такой свет истины, что, по-видимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

Таким образом, «Начала» определили метод изложения геометрической теории и содержание изучаемых вопросов.

В России в XVIII веке было сделано несколько переводов «Начал» на русский язык. Например, в 1739 году – с латинского; в 1769 году – с французского; в 1784 и 1789 годах – с греческого языков.

Опыт преподавания геометрии по «Началам» Евклида постепенно привёл к созданию первых отечественных руководств по геометрии. В развитии школьной учебной литературы прошлого выделим два этапа.

Первый этап охватывает вторую половину XVIII и первую половину XIX веков.

Наиболее значительные учебники геометрии этого периода были написаны следующими авторами: С. Назаровым (1772), Д. Аничковым (1780), М.Е. Головиным (1782), С.Е. Гурьевым (1798), Н.И. Лобачевским (1823), Ф.И. Буссе (1830).

Одним из первых был издан учебник Степана Назарова «Теоретическая и практическая геометрия». В нём впервые проявилась яркая отличительная черта российской учебной литературы – включение в содержание практических приложений. В силу важности этой книги для обсуждаемого нами вопроса приведём подробное оглавление учебника:

Часть первая. О геометрии вообще

Книга первая

Глава первая. О лонгиметрии или разделении линий и о начерчении разных геометрических фигур.

Глава вторая. О планиметрии или об измерении и исчислении плоскостей.

Глава третья. О превращении плоскостей.

Глава четвертая. О сложении, вычитании, умножении и делении плоскостей.

Комментарии. Лонгиметрия – это геометрия на прямой. Например, к лонгиметрии относится задача о делении отрезка пополам. Исчисление плоскостей означает нахождение площадей плоских фигур, среди которых прямоугольник (называемый прямоугольным параллелограммом), параллелограмм, трапеция, треугольник, правильные многоугольники, круг, эллипс. Под превращением плоскости имеются в виду равносоставленные плоские фигуры. В частности, превратить треугольник в прямоугольник (прямоугольный параллелограмм) или трапецию в треугольник. Сложить плоскости означает, например, начертить пятиугольник, площадь которого равна сумме площадей данного квадрата и данного круга. Вычесть плоскости – построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов. Произведение плоскостей – начертить треугольник, площадь которого была бы в два раза больше площади данного треугольника. Деление плоскостей – разделить данную трапецию на три части равной площади.

Книга вторая. О стиле геометрии вообще

Глава первая. О начерчении иррегулярных и регулярных корпусов, как оные из бумаги вырезать и клеить.

Глава вторая. Об измерении и исчислении иррегулярных и сферических корпусов, корпусного содержания и поверхностей оных.

Глава третья. Об исчислении сторон и корпусного содержания пяти регулярных корпусов, описанных в одном глобусе.

Глава четвертая. О превращении, сложении, вычитании, умножении и делении корпусов.

Комментарии. Корпус, как Вы, наверное, догадались означает тело. Автор определяет его следующим образом: «Корпус, или тело, есть пространство, имеющее в три стороны расширение, то есть в длину, ширину и высоту». Регулярный корпус – это правильный многогранник. Глобус – шар. Превращение – означает построение тела, равного с данным телом объёма. Например, превратить цилиндр в конус, который имел бы с цилиндром равные высоты, или превратить цилиндр в четырёхугольную призму; треугольную пирамиду превратить в треугольную призму таким образом, чтобы у них были равные базы (основания) и т.п.

Часть вторая

Книга первая. О тригонометрии вообще

Глава 1. О сочинении таблицы обыкновенных синусов, тангенсов и секансов.

Глава 2. О теоретических предложениях, по которым все тригонометрические задачи в выкладках решаются.

Глава 3. Об исчислении прямоугольных треугольников по простым таблицам синусов.

Глава 4. Об употреблении логарифмов, свойства и исчисления по оным прямоугольных треугольников.

Глава 5. Об исчислении по логарифмам остроугольных, тупоугольных треугольников и разных касающихся к фортификации задач.

Глава 6. Об изобретении по логарифмам соответствующих чисел и по оным логарифм, который в таблице не имеется.

Глава 7. Об изобретении логарифмов, соответствующих градусов, минут, секунд и прочего.

Книга вторая. О практике геометрии вообще

Глава 1. Об употреблении разных мер, также о кольях, сажени, веревке и цепи.

Глава 2. О действиях, которые на поле цепью и кольями решаются.

Глава 3. Об астролябии, квадранте, употреблении, сложении и о поправке их.

Глава 4. О действиях, которые по астролябии и квадранту производятся.

Глава 5. О полуденной линии, компасе и об употреблении оных при землемерии.

Глава 6. О вычислении линий и углов крепостного строения.

Глава 7. О мензуле и о сложении оной.

Глава 8. О действиях, которые по мензуле на поле производятся.

Глава 9. О нивелировании или об уравнении земной поверхности, сложении, употреблении и о поправке ватерпаса или уровня.

Глава 10. О действиях, которые по уровню производятся.

Глава 11. О рефракции (преломлении лучей).

Другим практическим руководством была изданная в 1780 году книга *Д. Аничкова* «Теоретическая и практическая геометрия в пользу и употребление не токмо юношества». В теоретической части она в значительной степени подражает «Началам». Отличительной особенностью является то, что материал разбит не на две части (планиметрию и стереометрию), как у Евклида, а на три: лонгиметрию (измерение линий), планиметрию (измерение поверхностей) и стереометрию (измерение тел).

Из таких же разделов состояло «Краткое руководство к геометрии» *М.Е. Головина*. Это первый российский школьный учебник по геометрии, изданный в 1782 году по распоряжению специальной комиссии для народных училищ екатерининского времени.

В состав комиссии вошли видные деятели того времени: П.В. Завадовский (заметим, это будущий первый министр просвещения России, назначенный на свой пост в 1802 году), Ф.И. Эпинус, П.И. Пастухов и Янкович де Мириево (сербский педагог, который прибыл в Россию по приглашению Екатерины II для организации народных училищ). Прежде всего комиссия решила обратить внимание на улучшение качества преподавания за счёт совершенствования методов обучения. Основная цель этого заключалась в том, чтобы учитель постоянно владел вниманием всех своих учеников и чтобы учащиеся могли легко понимать и усваивать содержание изучаемых предметов. Для этого были написаны соответствующие школьные учебники. По физико-математическому циклу – учебники по арифметике, геометрии, физике, механике и гражданской архитектуре.

М.Е. Головин принял самое активное участие в написании и издании этих учебников. В предисловии к руководству по геометрии он объяснил основные требования к «Новой методе обучения» следующим образом: «Учитель, проходя геометрию по сей книжке, должен прочитывать каждый период: потом изъяснить оный, тотчас спрашивать, как они истолкованное поняли, а не подаваться далее до тех пор, пока большая часть учеников не уразумела хорошо прочитанного. При задачах, доказательства требующих, надлежит истолковать самое предложение, потом приступить к доказательству. Причём должно напоминать ученикам, в каком случае задачу сию в общежитии употреблять можно».

Таким образом, начинает складываться и методика преподавания геометрии. При этом важно подчеркнуть, что начинают обращать внимание на развитие учащихся, причём не только памяти, а прежде всего их мышления, разума посредством изучения геометрии. Во многом этому способствует рассмотрение практических приложений геометрии. «Сколько знание геометрии – говорит Головин, – полезно и нужно в общежитии, никто спорить не может. Землемерие, архитектура, гражданская и военная, мореплавание, физика, механика и пр., словом, все полезнейшие для людей науки служат явным тому доказательством. Самые художества и рукоделие немалую пользу от ней заимствовать могут. Так, живописцу поможет она в исправном рисованье; инструментальщику в делании верных орудий; столяру и плотнику в проведении прямых и горизонтальных линий; каменщику в складывании стен; самому даже хлебопашцу сделает пользу при обозначении меж в случае споров при разделении полей во время посева, при строении овинов, закромов и пр.».

Итак, учебник состоял их трёх названных частей. Лонгиметрия содержала 41 задачу, среди которых задачи на деление отрезка пополам, строение перпендикуляра к прямой, о смежных и вертикальных углах и т.п.

В планиметрии предлагались доказательства теоремы о сумме углов треугольника, об углах при основании равнобедренного треугольника, о равенстве треугольников, о свойствах касательной и секущей окружности и т.д.

В стереометрии основной материал был связан с построением моделей многогранников и фигур вращения и вычислением объёмов и площадей поверхности пространственных фигур.

Ещё одной характерной особенностью этого учебника является включение в его содержание очень непростых, нестандартных задач. В качестве примера приведём следующую задачу: «Разделить треугольник из данной на линии точки на равные части». В учебнике даётся указание и чертёж для решения задачи в случае деления на три равные части. В современной терминологии эта задача звучит следующим образом: «Разделить треугольник прямыми, проведёнными из данной на одной из его сторон точки, на три равновеликие части».

Решение. Пусть дан ΔABC и точка D, принадлежащая стороне AC. Требуется из точки D провести прямые, которые разделили бы треугольник ABC на три равновеликие части.

Разделим AC на три равные части: $AE=EF=FC$ и пусть $D \in EF$. Проведём $EG||DB$ и $FH||DB$. DG и DH будут искомыми прямыми, так как площади фигур AGD, $DGBH$ и DHC равны. Действительно, треугольники ABE, EBF и FBC равновелики (у них равны «основания» и соответствующие высоты). Но $S_{AGD} = S_{ABE}$ ($S_{AGD} = S_{AGE} + S_{EGK} + S_{EKD}$, где $K = BE \cap GD$, $S_{ABE} = S_{AGE} + S_{EGK} + S_{GKB}$, но $S_{EKD} = S_{GKB}$, поскольку $S_{EKD} = S_{EGD} - S_{EGK}$ и $S_{GKB} = S_{EGB} - S_{EGK}$, но $S_{EGD} = S_{EGB}$, у треугольников EGD и EGB одно «основание» EG и высоты, опущенные соответственно из вершин D и B, равны, так как $EG||DB$).

Аналогичными рассуждениями можно показать, что равновелики четырёхугольник *DGBH* и треугольник *EBF*; треугольники *DHC* и *FBC*.

Другими заметными учебниками рассматриваемого периода были работы С.Е. Гурьева. В своём большом труде «Опыт об усовершенствовании элементов геометрии», опубликованном в 1798 году, он изложил свой собственный план построения школьного курса геометрии, отойдя от «Начал» Евклида, которые считал несовершенными с педагогической точки зрения. Главными своими задачами он ставил распределение учебного материала по предметам (в частности, чёткое выделение геометрического материала) и изменение порядка его изложения. Из двух способов распределения геометрических вопросов, а именно: а) строго логического, подчиняющегося только дедуктивному построению курса геометрии; б) логически обоснованная систематизация понятий и теорем, которая осуществляется на основе методической целесообразности, – Гурьев выбрал второй и в соответствии с этим предложил свой курс геометрии. При этом он утверждал, что строгость и точность не затрудняют и не обременяют ум, в математике нецелесообразно ставить вопрос о предпочтении точности и удобства. «Совсем напротив, чем вывод строже, тем он ко разумению удобен, ибо строгость состоит в приведении всей целости к началам наипростейшим».

Сказанное С.Е. Гурьев осуществил в своём курсе, разбив его на четыре книги.

1. О сопряжении прямых с прямыми.

Замечание. Сопряжение, говоря современным языком, это пересечение.

2. О сопряжении круга с прямыми.

3. О сопряжении плоскостей с прямыми и плоскостей с плоскостями.

4. О сопряжении трёх простейших поверхностей – цилиндра, конуса и шара, – с прямыми и плоскостями.

Первая книга начинается с рассмотрения двух прямых «перпендикулярных и наклонных». Сопряжение трёх прямых приводит к треугольникам или к двум параллельным прямым, пересечённым третьей. В неё вошли следующие главы: 1) Об углах. 2) О треугольниках. 3) О параллельных прямых. 4) О параллелограммах, включая теорему Пифагора. 5) О многоугольниках. В последней главе даётся учение о подобии и теории пропорций.

Вторая книга разбита на три главы: 1) О сопряжении окружности с прямыми, не замыкающими определённого пространства. 2) О вписанных и описанных многоугольниках. 3) О способе пределов и сравнении круга с треугольником. Две главы третьей книги трактуют о сопряжении плоскостей с прямыми и плоскостями, не порождающими определённого пространства, а также о параллелепипедах, призмах и пирамидах. Последняя, четвёртая, книга состоит из трёх глав – о цилиндре, конусе и сфере.

Идеи, заложенные в этой первой книге С.Е. Гурьева по геометрии нашли воплощение в следующей его работе «Основания геометрии», написанной в 1804 году. Очень содержательно предисловие к этому произведению, в котором автор излагает свои уже сформировавшиеся методические взгляды. Например, интересно следующее его высказывание по поводу преподавания геометрии: «Система элементарной геометрии может быть двоякой: или соображённой с началами, или соображённой с предметами. Откуда рождается вопрос, какая из сих систем есть полезнейшая и превосходнейшая? Для решения оного надлежит, быть может, самих людей разделить на два рода: на способных изобретать новые истины и не более способных токмо понимать уже изобретённые. Первым полезна система, соображённая с началами, а другая – соображённая с предметами». Другими словами, здесь Гурьев говорит о системе преподавания, отвечающей индивидуальным склонностям и запросам самих учеников. К сожалению, он не смог в полной мере осуществить всё начатое и задуманное, прожив короткую жизнь (1764–1813). Однако поднятые им вопросы нашли яркое продолжение в работах его учеников. Например, непосредственный его ученик А.Н. Ильинский, преподаватель Петербургского горного корпуса, опубликовал в 1825 году «Основания геометрии, составленные по системе императорской Санкт-петербургской Академией наук академика С.Е. Гурьева». В предисловии автор подчёркивает взгляды Гурьева на чёткое и ясное построение курса геометрии, на то, что учащиеся должны получить впечатление, что геометрия это не случайный набор каких-то фактов и теорем, которые нужно заучить, а это стройная система, где теоремы объединены в определённые группы, имеющие свои названия. «Кто же не пленится сими качествами, – говорит Ильинский, – кто не отнесёт их к совершенству учебной книги; кто не согласится, что при разборе истин, разбросанных без порядка, учащийся должен почти в одно и то же время заниматься многими и разнообразными предметами, которые, поступая один за другим в память его, или тут же изглаживаются, или смешиваются один с другим так, что сосредоточить понятие о них весьма трудно».

Теперь остановимся кратко на содержании этой книги, так как именно в ней определена последовательность, строгость изложения материала и круг рассматриваемых геометрических вопросов.

Во введении даются пять аксиом.

1. Величины, равные той же или равные суть и взаимно, равны между собой.

2. Целая величина больше своей части или часть меньше целой своей величины.

3. Величина, которая ни больше, ни меньше другой, есть равна сей другой.

4. Если к той же или к равным величинам приложены равные или та же, то и целые равны.

5. Если от той же или от равных величин отнять равные или та же, то и остатки равны.

Основное содержание состоит из четырёх частей.

Книга I. О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении на плоскости протянутых прямых линий с прямыми линиями. В неё входят отдельные главы об углах (прямых, острых, тупых); треугольниках; параллельных прямых; параллелограммах; многоугольниках; о теории пропорциональных величин; о приложении оной к прямым линиям и образованных ими плоскостям; о подобии многоугольников.

Книга II. О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении круговой линии с прямыми. Она имеет четыре главы: собственно о прямых, с круговою линией сопряжённых, и углах, ими составленных; о многоугольниках, в круг вписанных и около оного описанных; о теории пределов; о сравнении круга с пространством прямолинейным и взаимном отношении самих кругов и их окружностей.

Книга III. О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении плоскостей с прямыми линиями и плоскостями. В неё входит семь глав, где излагается очень важный раздел курса геометрии – теория многогранников: о линиях и плоскостях, перпендикулярных, параллельных и наклонных; о толстых углах (многогранных); о пирамидах и призмах; о параллелепипедах; о многогранниках вообще; о подобии многогранников. Здесь даётся определение толстого угла, отдельно выделяются толстые углы, имеющие три стороны (т.е. трёхгранные углы). Для последних предлагаются признаки равенства. Рассматриваются отдельные виды многогранников: пирамиды, призмы, их элементы и частные виды. Весь теоретический материал сопровождается подробными чертежами, чего не было в предыдущих учебниках. Даётся общее определение многогранника: «Ежели какие ни есть многоугольники, находящиеся в разных плоскостях, равными сторонами своими взаимно прикасаются так, что ими заключается определённое пространство, то оно вообще многогранником называется; и каждый из сих многоугольников порознь гранью, а все вместе поверхностью именуются; каждая же из прямых, в коих многоугольники взаимно прикасаются, ребром многогранника называется». Это определение является одним из первых определений многогранника в учебной литературе. Оно наглядно и дано после рассмотрения простейших видов многогранников. Даётся определение правильного многогранника: «Многогранник, в коем все грани суть совершенно равные правильные многоугольники, и толстые углы, содержимые углами сих многоугольников, также есть совершенно равные, называется правильным, всякий же иной – неправильным». Это определение потом долго переходило из учебника в учебник. Доказывается, что гранями правильных многогранников могут быть только равносторонние треугольники, квадраты и правильные пятиугольники. При доказательстве этого факта используется свойство толстых углов: плоские углы толстого угла, вместе взятые, меньше четырёх прямых.

Завершается учебник книгой IV «О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении трёх кругов, образованных поверхностями с прямыми линиями и плоскостями». В неё входят две главы: «О конусе и цилиндре»; «О сфере и шаре».

В заключение ещё раз подчеркнем, что этот учебник отличается наличием подробных наглядных иллюстраций и чертежей.

Далее необходимо отметить «Курс математики» Т.Ф. Осиповского. Он состоял из трёх томов:

I. Частная и общая арифметика (вышел в 1802 году).

II. Геометрия (1801).

III. Теория аналитических функций (1820).

Как видим, сначала вышла «Геометрия». Она содержит традиционные для этого периода части: лонгиметрию, планиметрию, штереометрию (стереометрию). Но эта книга имела и нетрадиционные дополнительные статьи из «криволинейной геометрии», по теории кривых, среди которых рассматривались эллипс, парабола, гипербола, циссоида Диоклеса, спираль Архимеда. Таким образом, этот учебник предлагает обязательный учебный материал и необязательный для тех, кто интересуется геометрией, хочет узнать о ней больше.

Следующим значительным учебным руководством по геометрии этого периода была книга Н.И. Лобачевского «Геометрия», написанная им в 1823 году, т.е. до величайшего открытия неевклидовой геометрии. Эта книга предназначалась для тех, кто интересуется геометрией. В ней Лобачевский представлял свой способ изложения геометрии – достаточно строгое и систематическое, соответствующее возрасту учащихся. Планиметрия и стереометрия излагались параллельно, совместно. Здесь впервые в истории была предпринята попытка нарушить школьную последовательность изложения геометрии по Евклиду – от планиметрии к стереометрии. Идея слитного изучения нескольких предметов, в частности, планиметрии и стереометрии, позже была названа *фузионизмом*. Более подробно фузионистский учебник Лобачевского представлен в пункте 25 настоящей работы.

Заметными произведениями рассматриваемого исторического периода стали: «Руководство к геометрии для уездных училищ» (1831) и «Руководство к геометрии для гимназий» (1844) Ф.И. Буссе. Особенностями этих произведений является то, что автор отошёл от излишней теоретизации и при доказательстве многих теорем предлагал убедиться учащимся в их справедливости на наглядных примерах. А во второй – отказался от традиционного по тем временам деления геометрии на лонгиметрию, планиметрию и стереометрию. В его учебнике только два раздела: планиметрия и стереометрия. Такое деление геометрии очень понравилось и закрепилось в учебниках последующих поколений.

Таким образом, первый этап становления и развития российского учебника геометрии характеризуется тем, что была:

1) признана нецелесообразность использования «Начал» Евклида в качестве школьного учебника по геометрии;

2) обоснована необходимость строго дедуктивного метода её изложения;

3) определена структура и последовательность предлагаемого учебного геометрического материала;

4) предложен круг вопросов по методике преподавания геометрии, в частности, сделан серьёзный вывод о том, что учебник геометрии не может быть простым сборником научных статей по геометрии, изложение должно быть доступным для понимания учеников и соответствовать их индивидуальным и возрастным особенностям, уровню развития и целям преподавания.

Второй этап развития российского учебника геометрии охватывает период со второй половины XIX века до 1917 года. Этот период особенно богат учебной литературой. Было издано свыше 60 учебников по геометрии, в том числе таких известных авторов, как М.Е. Ващенко-Захарченко, М.В. Остроградский, А.Ф. Малинин, А.Н. Глаголев, А.Ю. Давидов, А.П. Киселёв и мн. др. Формировались традиции российского учебника по элементарной геометрии. Например, в ряде учебников начали появляться сведения по истории геометрии. Одним из первых авторов ввёл в свои учебники исторический материал М.Е. Ващенко-Захарченко. Ему же принадлежит и отдельная книга – «Исторический очерк развития геометрии» (1883). Эта работа была очень важна, так как в ней была систематизирована история геометрии по основным периодам, а именно:

I. Греки. Школы: 1) Ионийская. 2) Пифагорейская. 3) Платоновская. 4) Александрийские (первая и вторая школы). 5) Афинская и византийская школы.

II. Римляне.

III. Средние века.

IV. Арабы.

В этой работе автор подчёркивает, что геометрия, как одна из важнейших областей математики, возникла эмпирически из опытов и наблюдений и первоначально имела чисто практический характер. Возводя различные сооружения, человек мог получать представления о различных геометрических фигурах. Таким образом, возникали понятия о различных треугольниках, четырёхугольниках, разных телах, например, призме, цилиндре, пирамиде и т.д. Автор специально обращает внимание читателя на тесную связь между геометрией и архитектурой, строительством, астрономией и искусством измерения Земли. Постепенно, накапливая сведения о свойствах геометрических фигур, человек научился обобщать полученные знания. Впоследствии, с течением времени, он находил известные свойства, которые принимал за правила.

Сведения из истории начинают появляться и в других учебниках геометрии, например, в работах А. Мерчинского. Первый его учебник вышел в 1870 году (второй – в 1897). В этой книге уже во введение включены вопросы истории. В частности, очень подробно рассказывается о последней XIII книге «Начал», посвящённой правильным многогранникам. Характерной особенностью геометрии Мерчинского является то, что он уделил много внимания геометрии пространства, считая, что геометрия на плоскости это лишь вспомогательный материал для изучения свойств пространственных фигур. Приведём краткий обзор материала по стереометрии.

Глава I. Прямые и плоскости

§ 1. Параллельные прямые.

§ 2. Прямые, взаимно пересекающиеся.

§ 3. Параллельные плоскости.

§ 4. Прямые, параллельные плоскости.

§ 5. Плоскости, параллельные прямой.

§ 6. Прямые, пересекающие плоскость.

§ 7. Параллельные прямые, пересечённые плоскостью.

§ 8. Прямая, пересечённая параллельными между собой плоскостями.

§ 9. Перпендикуляр и наклонная к плоскости и обратно.

Глава II. Плоскостные углы

§ 1. Двугранные углы.

§ 2. Свойство двугранных углов, происходящих от пересечения двух плоскостей между собой.

§ 3. Двугранные углы, образуемые параллельными между собой плоскостями с секущей их плоскостью.

§ 4. Многогранный угол.

§ 5. Трёхгранный угол.

Глава III. Плоскостные геометрические фигуры

§ 1. Понятие о многогранниках.

§ 2. Призма.

§ 3. Пирамида.

§ 4. Правильные многогранники.

Глава IV. Геометрические прикладные числа

§ 1. Пропорциональность прямых и углов в пространстве.

§ 2. Подобные многогранники.

§ 3. Измерение площади поверхности многогранников.

§ 4. Измерение объёма многогранников.

Глава V. Круговые тела

§ 1. Цилиндр.

§ 2. Конус.

§ 3. Шар.

Этот учебник содержит богатый материал, рассмотрены многие свойства. Например, во второй главе во втором параграфе представлены следующие свойства:

1. Для всякого двугранного угла его угол наклонения имеет величину постоянную. Углы наклонения равных двугранных углов равны между собой.

2. Двугранные углы, каждый отдельно и вместе взятые, имеют углы наклонения соответственно одноимённые. Поэтому свойства двугранных углов те же самые, как и их углов наклонения.

3. Сумма двугранных углов, составленных плоскостями, проходящими через одну и ту же прямую, есть величина постоянная.

4. Сумма смежных двугранных углов равна двум прямым двугранным углам.

5. Вертикальные двугранные углы равны.

6. Плоскость, проведённая через перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна к этой плоскости.

7. Перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, опущенный из точки, взятой на другой плоскости, лежит весь в этой плоскости.

8. Плоскость, перпендикулярная к прямой пересечения нескольких плоскостей, перпендикулярна к каждой из них.

9. Через данную точку к двум пересекающимся плоскостям можно провести одну перпендикулярную плоскость.

10. Плоскость, перпендикулярная к прямой, лежащей на другой плоскости, перпендикулярна к этой последней.

11. Через перпендикуляр к плоскости можно провести к этой последней множество перпендикулярных плоскостей.

В этом учебнике даётся определение многогранного угла: «Пространство, заключающееся между несколькими пересекающимися плоскостями, прямые пересечения которых сходятся в одной и той же точке, называется многогранным углом». Рассматриваются только выпуклые многогранные углы. Это углы, которые все лежат с одной стороны плоскости, проведённой через каждую из его граней. Аналогично рассматриваются только выпуклые многогранники. Это многогранники, которые лежат все с одной стороны от плоскости каждой своей грани.

Заметим, что плоскостными геометрическими фигурами автор называет многогранники, так как в учебнике даётся следующее определение многогранника: «Многогранником называется геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскостями». После общего определения идут частные виды: призма (прямая, правильная, наклонная), выделяется параллелепипед (прямой, прямоугольный, куб); пирамида (правильная, усечённая); правильные многогранники (все пять типов выпуклых правильных многогранников).

По мнению автора, метод геометрии состоит из трёх частей: наблюдения, проверки и обобщения. Исходя из этого, он старался соответствующим образом изложить предлагаемый материал.

Особенностью учебников данного периода стало стремление авторов, при соблюдении требования логической строгости, сделать изложение школьного курса геометрии более понятным и доступным для учащихся. С этой целью они включали в содержание задачи практического (на построение, конструктивные, на вычисление) и прикладного (из области строительной, землемерной, морской техники) характера.

Например, в 1844 году П.С. Гурьев (родной сын С.Е. Гурьева, о котором речь шла выше) составил и издал «Практические упражнения в геометрии». В предисловии к этой книге, объясняя основные цели и задачи своей работы, он писал: «Цель предлежащей книги состоит в том, чтобы без нарушения общепринятого способа преподавания геометрии дать ученикам возможность чаще возбуждать в себе самодеятельность, пытать свои силы в применении общих законов к частным случаям и, наконец, в преодолении затруднений собственным усиленным напряжением ума находить истинное удовольствие». Эта книга ценна тем, что содержит систему планиметрических задач на построение и вычисление. Причём, задачи расположены по степени увеличения их трудности (от лёгких к трудным).

В связи с этим отметим также «Руководство начальной геометрии» (в трёх томах) М.В. Остроградского. Известно, что его, как научные, так и педагогические произведения, отличались оригинальностью расположения учебного материала, строгостью изложения, новизной доказательств теорем и выводов формул, практическими приложениями. Например, в своих школьных учебниках он уделил большое внимание тригонометрии. Причём, особое место отвёл решению прямоугольных треугольников. Перед ними даётся определение «тригонометрических линий» как отношение сторон рассматриваемых треугольников (длина гипотенузы принимается за единицу). Затем идёт решение косоугольных треугольников, теорема синусов (она доказывается из рассмотрения диаметра окружности, описанной около треугольника). Даются приложения геометрии к инженерной геодезии.

В предисловии («предуведомлении») к «Руководству…» М.В. Остроградский пишет: «Сочинение это отличается от других руководств по той же науке развитием начал, порядком теорем и способом доказательств. Автор имеет в виду приблизить изложение истин начальной геометрии к способам, употребляемым в других частях математики, а потому разместил предложения в порядке, который ему показался наиболее соответствующим поставленной цели. Однако же он не посмел в первой попытке войти в решительное состязание с изложением, которому Евклид представил образец и которое употребляется более 20 веков. Теперь же только некоторые предложения доказаны способом аналитическим и без подобия фигур, т.е. дан алгебраический характер только некоторым частям геометрического изложения. Что касается до подробностей в объяснении предмета и оснований науки, предложений, на которых она основана и начальных её истин, то некоторые из этих подробностей, а может быть и все, могут показаться бесполезными. Автор имел в виду избежать недостатка противного, т.е. неполноты объяснений. Он полагает, что составители курсов начальной геометрии по примеру Евклида сократили этот важный предмет и тем самым могли породить неясность в идеях и неправильные взгляды на начала науки».

Заметим, что современники критиковали Остроградского за то, что он недооценивал, с их точки зрения, роли наглядности при изложении геометрии. Вот как отозвался о «Руководстве…» известный российский математик А.Н. Крылов: «Учебником для средних школ оно служить не может, но не как учебник, а как обязательное пособие в педагогических техникумах сочинение было бы в высшей степени полезным, ибо это есть «Начальная геометрия» для взрослых, а не для мальчиков и девочек». Остроградский стремился полностью избежать наглядности. Это делалось сознательно, чтобы избежать доказательств, как говорил автор, «заимствованных от показания чувств».

Вместе с тем, наряду с авторами, которые стремились к увеличению строгости изложения, были другие, считавшие геометрию наглядным предметом, и в соответствии с этим её излагавшие. Так, например, построен учебник А.Ф. Малинина «Курс наглядной геометрии и собрание геометрических задач» (1873), в котором каждое определение поясняется на реальных предметах. Приведём оглавление этого учебника:

Введение.

1. Об углах.
2. О линиях, перпендикулярных и косвенных.
3. О линиях, параллельных.
4. О треугольниках.
5. О многоугольниках.
6. Об окружности.
7. Подобие фигур.
8. О площадях.
9. О линиях и плоскостях в пространстве.
10. О телах.
11. Измерение поверхности тела.
12. Измерение объёма тела.

Например, в пункте «О телах» сказано, что тела могут быть ограничены плоскостями, тут же пример – обыкновенная комната, в которой находятся ученики, ящик. В учебнике помещены развёртки, которые названы сетями, прямоугольного параллелепипеда, куба.

После такого изложения теории идут вопросы для учащихся. В частности, после указанного пункта даны следующие вопросы: «Что называется телом? Укажите несколько тел. Сколько измерений имеет тело? Укажите измерения комнаты, книги, мячика. Какое тело называется многогранником? Укажите несколько многогранников».

Таким образом, усвоение материала учащимися идёт через ответы на вопросы и решение задач.

Эти особенности сделали учебники А.Ф. Малинина весьма популярными. Заметим, что помимо геометрии, им были написаны руководства по прямолинейной тригонометрии, арифметике, алгебре. Они имели большой успех, и среди российских преподавателей математики XIX века было немало последователей этого направления. Более подробно курсы наглядной геометрии представлены в пункте 6 настоящей работы.

Одним из самых известных учебников геометрии рассматриваемого периода является учебник А.Ю. Давидова «Элементарная геометрия», который выдержал 39 изданий, первое – в 1864 году, последнее – в 1922 году.

Во введении автор представляет важные термины, основные понятия, чего не было в других учебниках. Например, математика толкуется им как учение о величинах, геометрия – отдел математики, содержащий учение о протяжении. «Геометрия рассматривает тела только относительно пространства, ими занимаемого, не обращая внимания на другие их свойства, и вследствие этого геометрическим телом, или просто телом, называют в геометрии пространство, со всех сторон ограниченное, независимо от вещества, его наполняющего. Граница тела называется поверхностью, граница поверхности – линиею, граница линии – точкою. Тела имеют три измерения: длину, ширину и высоту; поверхности – два измерения: длину и ширину; линии – одно измерение: длину, а точка не имеет никакого измерения».

Далее даётся представление о линиях прямых и кривых, ломаной, суждении (мысль, в которой мы что-либо утверждаем или отрицаем), доказательстве (оправдание суждения посредством рассуждений), аксиоме (суждение, которое устанавливается без доказательства), теореме (суждение, которое устанавливается посредством доказательства), проблеме или задаче (вопрос, ответ на который основывается на доказанных предложениях), лемме (теорема, которая вводится для доказательства другой более важной теоремы или для решения задачи).

Книга состоит из двух частей:

Часть I. Планиметрия

Глава I. О прямых линиях и углах.

Глава II. О фигурах. О фигурах вообще. – Равенство треугольников. – Свойство перпендикуляра и наклонных.

Глава III. Параллельные линии. Теория параллельных линий. – Некоторые следствия её. – О параллелограммах и трапециях.

Глава IV. Пропорциональные линии. Общая мера двух линий. – Пропорциональные линии. – Отношение линий.

Глава V. Подобие прямолинейных фигур. Подобие треугольников. – Подобие многоугольников. – Гармоническое деление.

Глава VI. Об окружности круга. Хорды и касательные. – Измерение углов. – Пропорциональные линии в круге. – Вписанные и описанные многоугольники. – Относительное положение двух окружностей. – Четыре замечательные точки треугольника. – Взаимные точки. – Поляры.

Глава VII. О правильных многоугольниках. Правильные многоугольники, вписанные и описанные.

Глава VIII. Измерение площадей. Измерение площадей прямолинейных фигур. – Некоторые предложения о треугольниках, четырёхугольниках и правильных многоугольниках. – Съёмка плана.

Глава IX. Определение окружности и площади круга. О пределах. – Определение окружности и площади круга. – Квадратура круга. – Гиппократова луночка. – Определение площади криволинейных фигур.

Часть II. Стереометрия

Глава I. О линиях и плоскостях в пространстве. Определение положения плоскости. – Линии, перпендикулярные к плоскости. – Линии, параллельные между собой. – Линии, параллельные плоскости. – Плоскости, параллельные между собой.

Глава II. Об углах, образуемых плоскостями. Угол двух линий и угол линии с плоскостью. – Углы двугранные. – Углы многогранные. – Равенство и симметрия трёхгранных углов.

Глава III. О многогранниках. Призмы, параллелепипеды и пирамиды. – Равенство призм и пирамид. – Симметричные многогранники. – Подобие многогранников.

Глава IV. Измерение объёмов тел. Объём параллелепипеда, призмы и пирамиды. – Объёмы подобных многогранников.

Глава V. О телах круглых. О цилиндре и конусе. – О шаре. – О сферическом треугольнике. – Подобие круглых тел. – Конические сечения.

Каждая глава завершается рубрикой «Задачи», к которым в конце учебника приведены указания для решения и ответы. Необходимо отметить, что данный учебник напечатан двумя шрифтами: крупным – обязательный для всех учащихся материал, а мелким – дополнительный, для тех, кто заинтересуется геометрией. Например, в первой части (планиметрии) к необязательному материалу отнесены некоторые предложения о треугольнике: «Сумма квадратов двух сторон AB и BC треугольника ABC равняется двойному квадрату отрезка BD, соединяющего вершину треугольника с серединой «основания», сложенному с двойным квадратом половины основания, т.е.: $AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$».

«Если через какую-нибудь внутреннюю точку O треугольника ABC проведём прямые AA_1, BB_1, и CC_1, разделяющие каждую сторону треугольника на два отрезка, то произведение трёх отрезков, не имеющих общей вершины треугольника, равняется произведению трёх других отрезков: $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$».

«Если вершину B треугольника ABC соединим с произвольною точкой D противоположной стороны, то $AB^2 \cdot CD + BC^2 \cdot AD - BD^2 \cdot AC = AC \cdot AD \cdot DC$».

Далее четыре замечательные точки треугольника (точка пересечения высот, точка пересечения медиан треугольника, центр вписанной и центр описанной около треугольника окружности); квадратура круга; луночки Гиппократа и мн. др.

Все теоремы и задачи снабжены соответствующими подробными доказательствами и решениями. В стереометрии к такому материалу отнесены следующие вопросы: равенство и симметрия трёхгранных углов; теоремы о равенстве двух призм или двух пирамид; симметричные многогранники; подобие многогранников; объёмы подобных многогранников; сферические треугольники и др.

Следующим значительным учебником этого времени является «Сборник геометрических задач на построение и краткий курс элементарной геометрии» А.Н. Глаголева, изданный в 1890 году. К несомненным достоинствам этой книги относится чёткость изложения, удачно подобранные иллюстрации, новизна содержания. В качестве примера приведём содержание одной из центральных тем курса – «Многогранники». В неё включён материал по комбинаторным свойствам многогранников. Доказывается теорема о том, что число плоских углов, образуемых рёбрами многогранника на поверхности, вдвое больше числа его рёбер, из чего, как следствие, вытекает, что число плоских углов многогранника всегда чётно. Далее рассматривается и доказывается теорема Эйлера о числе вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника. Здесь впервые эта теорема введена в содержание основного курса геометрии и используется для построения теории правильных многогранников. Вводится несколько новых типов многогранников: призматоид – многогранник, ограниченный с двух сторон двумя параллельными плоскостями, называемыми основаниями, а с боков – пересекающимися плоскостями. Если в основаниях многоугольники с одинаковым числом сторон, а боковые грани – трапеции, призматоид является обелиском. Если в основаниях обелиска лежат прямоугольники, то он называется понтоном. Клин – многогранник, верхнее основание которого есть прямая линия, нижнее, ей параллельно, и боковые грани – треугольники и трапеции.

Самым популярным и долголетним учебником этого периода была знаменитая «Элементарная геометрия» А.П. Киселёва. Уже в первом издании 1892 года учебник имел большой содержательный материал, высокое педагогическое мастерство изложения. Учебник состоял из двух частей: планиметрии и стереометрии. В первую были включены следующие вопросы: прямая линия, окружность, подобные фигуры, правильные многоугольники и вычисление длины окружности, измерение площадей, определение длины окружности и площади круга на основании аксиомы непрерывности.

Стереометрия состояла из четырёх следующих отделов: прямые и плоскости; начала проекционного черчения; многогранники; круглые тела. Вопросы вычисления объёмов и площадей поверхностей пространственных фигур не выделены в отдельную главу, а рассматриваются при изучении конкретных многогранников и круглых тел, причём, внесены новые элементы, а именно, аксиоматическое определение понятия объёма и принцип Кавальери. Этот учебник отличается оригинальной подборкой задач. Причём, они помещены после изучения каждой темы и разделены по рубрикам «Найти геометрические места», «Задачи на доказательство», «Задачи на вычисление» и «Задачи на построение».

Заметим, что первые учебники данного исторического периода содержали в основном теоретический материал, но постепенно авторы стали включать в свои учебники и систему тренировочных задач и упражнений. К таким учебникам относятся три последних представленных учебника А.Ю. Давидова, А.Н. Глаголева и А.П. Киселёва.

В середине XIX века стали появляться отдельно издававшиеся от учебников сборники задач по геометрии.

Например, к учебнику А. Ю. Давидова был издан в 1869 году специальный сборник задач, который назывался «Собрание геометрических теорем и задач». Автор – Е.М. Пржевальский (младший брат известного путешественника Н.М. Пржевальского). В этой книге впервые предлагается классификация школьных геометрических задач на доказательство; построение; вычисление. Именно в такой последовательности и представлены задачи по каждой теме планиметрии и стереометрии. Причём, задачи распределены по блокам, в каждом из которых изложение идёт в соответствии с дидактическими принципами: от простого к сложному и последовательности.

В качестве примера приведём такие задачи.

1. Докажите, что середины сторон квадрата являются вершинами квадрата.

2. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

3. Докажите, что середины сторон трапеции являются вершинами параллелограмма.

4. Докажите, что середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5. Докажите, что середины двух противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

6. Докажите, что точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника делит пополам отрезок, соединяющий середины его диагоналей.

7. Постройте выпуклый четырёхугольник по четырём его сторонам и отрезку, соединяющему середины его диагоналей.

Отметим «Сборник геометрических задач» В.П. Минина, пятнадцатое издание которого вышло в 1913 году. Автор – учитель одной из московских гимназий, который предложил задачи из собственной практики работы. Таким образом, в пособие вошли разнообразные задачи для практических упражнений учеников в классе и дома, причём, задачи, как на вычисление, так и на доказательство, а также задачи для «письменных переводных и окончательных испытаний учащихся».

В предисловии автор говорит, что его книга, прежде всего, адресована ученикам, а потому он старался сделать её удобной для работы: избегал «больших числовых данных, только затрудняющих ход вычислений, а для геометрии не имеющих значения» и заботился «о выборе таких условий, которые приводили бы к результатам, по возможности, простым, имея в виду знакомить учащихся главным образом с приёмами решений».

Сборник состоит из следующих двенадцати отделов и трёх прибавлений:

Отделы

1. Прямая линия. Углы. Треугольники. Параллельные линии.
2. Окружность круга. Измерение углов.
3. Пропорциональность прямых линий. Подобие прямолинейных фигур. Пропорциональные линии в круге.
4. Правильные многоугольники.
5. Площади прямолинейных фигур.
6. Длина окружности. Площадь круга.
7. Прямые линии и плоскости в пространстве.
8. Тела многогранные.
9. Круглые тела.
10. Общий, несистематический. Задачи, относящиеся к различным отделам стереометрии.
11. Примеры задач на наибольшие и наименьшие величины (*maximum* и *minimum*).
12. Приложение алгебры к геометрии.

Прибавления

I. Собрание задач, решаемых совместным применением геометрии и тригонометрии.

II. Некоторые теоремы, относящиеся: а) к учению о поверхностях и телах вращения; б) к учению о проекциях. Задачи, решаемые при помощи этих теорем.

III. Список задач, служащих геометрическими темами на испытаниях зрелости во всех учебных округах России.

Приведём несколько примеров задач из данного сборника (содержание задач дано в авторской редакции).

Задача № 229 (отдел 5). На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отложены части $AR = \frac{2}{3}AB$ и $AE = \frac{1}{3}AD$, точки R и E соединены прямой RE. Найти отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника ARE. (Ответ: 9).

Задача № 334 (отдел 8). Радиус круга, описанного около основания правильного тетраэдра, равен R. На каком расстоянии от вершины тетраэдра нужно провести плоскость, параллельную основанию тетраэдра, для того чтобы она разделила последний на две равновеликие части? (Ответ: $R\sqrt[6]{2}$).

Автор стремился вызвать интерес у школьников, включая практические вопросы, которые решаются на основании геометрических соображений.

Например, *задача № 541 (отдел 10).* Из шара, составленного из железного и медного полушарий и весящего P килограммов, выпиливается куб, диагональ которого равна диаметру шара. Определить вес опилок. (Ответ: $P(\frac{\pi-2\sqrt{3}}{3\pi})$).

В заключение приведём пример экзаменационной геометрической задачи на аттестат зрелости для учащихся Московского учебного округа (испытания 1873 года).

Задача № 877 (прибавление III). Сторона десятиугольного основания правильной пирамиды равна 0,93 арш., апофема пирамиды равна $25\frac{5}{8}$ арш. Определить поверхность и объём описанного около пирамиды конуса, усечённого параллельно основанию, при этом дано, что сечение сделано на расстоянии $\frac{7}{9}$ высоты от основания. (Напомним, что 1 аршин = 71,1 см.).

Ещё отметим «Систематический сборник геометрических задач на вычисление» Б. Магалифа, состоящий из двух томов. Первый посвящён планиметрии (7-е изд., 1914), второй – стереометрии (4-е изд., 1914).

В предисловии автор следующим образом объясняет причины составления подобного сборника геометрических задач:

1) На уроках геометрии достаточно времени для того, чтобы «на геометрических данных повторить с учащимися задачи на различные соотношения между числами, например, нахождение чисел по их сумме и разности, по сумме или разности и отношению и т.п.». Автор считает, что в курсе геометрии подобные задачи могут быть разобраны на наглядных примерах и не решаться механически, как это происходит в курсах арифметики и алгебры.

2) Учебники геометрии содержат «более крупные теоремы, рассматривают более, так сказать, выпуклые свойства фигур и существеннейшие соотношения между их элементами». Задачи в систематическом сборнике подробно знакомят учащихся с более простыми теоремами, следствиями теорем, свойствами различных фигур.

3) Большое значение придаётся устным упражнениям, которые специально выделены в тексте пособия мелким шрифтом и имеют свою нумерацию. «Неприятно, тяжело видеть – говорит автор, – как юноша при решении простенькой численной задачи берётся за письменные принадлежности и без них чувствует себя беспомощным».

4) При поиске любой предлагаемой задачи на первое место ставятся геометрические соображения. Отчасти поэтому в различные места сборника вставлены задачи на перегибание и разрезание фигур.

5) В сборник включены задачи с несколькими способами решениями, способствующие формированию исследовательских навыков учащихся.

Приведём несколько примеров названных задач из первого тома – планиметрии.

Задача № 51 (устная задача). Периметр прямоугольного треугольника равен 7 м, радиус вписанного круга содержит 6 дм. Определить гипотенузу. (Ответ: 29 дм.).

Задача № 52 (устная задача). Стороны треугольника содержат 8 см, 7 см и 5 см. Требуется меньшую сторону переломить на две части так, чтобы получился четырёхугольник, в который можно вписать круг. (Ответ: 3 см и 2 см.).

Задача № 206 (письменная задача). Описанный угол содержит 49°. Определить дуги, заключённые между точками касания (двумя способами). (Ответ: 131° и 229°).

Задача № 710 (письменная задача). Прямоугольник, разрезанный пополам, образует части, подобные целому прямоугольнику. Определить отношение его сторон. (Ответ: $\sqrt{2}$).

Самыми популярными были задачники Н.А. Рыбкина. По геометрии это: «Собрание стереометрических задач, требующих применения тригонометрии» (1892), «Сборник геометрических задач на вычисление» (Часть I. – Планиметрия. Часть II. – Стереометрия; 1905). Эти пособия много раз переиздавались.

Первая названная книга начинается с введения, в котором учащимся представляются некоторые теоремы, формулы и преобразования, которые потребуются для решения задач сборника. Всего дано 23 таких пункта. Например: пункт V. Для определения высоты треугольника иногда удобно пользоваться двояким выражением его площади; пункт VIII. Если треугольник или многоугольник проектируется на плоскость, то площадь проекции равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла с плоскостью проекции; пункт XIX. Хорда равна диаметру, умноженному на синус половины дуги; пункт XXIII. Площадь четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Далее во введении приведены еще двенадцать задач, «решённых сполна – с целью указать некоторые приёмы, которые понадобятся далее».

Задача № 1. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проходит плоскость, наклонённая к катетам под углами α и β. Какой угол она составляет с плоскостью треугольника?

(Ответ: $\sin\varphi = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$).

Задача № 12. Определить плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды, если центры вписанного и описанного шаров совпадают. (Ответ: 45°).

В сборник по планиметрии включены следующие разделы: Прямая линия. Углы. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляры и наклонные. Параллельные линии. Сумма углов треугольника и многоугольника. Параллелограммы и трапеции. Окружность. Измерение углов с помощью дуг. Описанная и вписанная окружности. Относительное положение окружностей. Пропорциональность прямых линий. Свойство биссектрисы угла в треугольнике. Подобие треугольников и многоугольников. Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырёхугольников. Пропорциональные линии в круге. Правильные многоугольники. Площади прямолинейных фигур. Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей. Смешанный отдел. Ответы.

Приведём несколько примеров из последнего смешанного отдела.

Задача № 772. Данного круга касаются два меньших – один изнутри, другой извне, причём, дуга между токами касания содержит 60°. Определить расстояние между центрами меньших кругов, если их радиус равен r, а радиус большего круга равен R. (Ответ: $\frac{\sqrt{7R^2+9r^2}}{2}$).

Задача № 828.* Определить площадь треугольника по трём его медианам l, m и n. (Ответ: $\frac{4}{3}\sqrt{q(q-l)(q-m)(q-n)}$, где $q = \frac{l+m+n}{2}$).

Задачи, отмеченные звёздочкой, по существу, повышенной трудности, они имеют не только ответ, но и указание для решения.

Задача № 839.* Точка, взятая внутри угла в 60°, удалена от его сторон на расстояния a и b. Найти её расстояние от вершины угла. (Ответ: $2\sqrt{\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2})$.

В стереометрию вошли такие разделы: Прямые, перпендикулярные и наклонные к плоскости. Параллельные прямые и плоскости. Угол прямой линии с плоскостью. Углы двугранные и многогранные. Параллелепипеды и призмы. Пирамида. Усечённая пирамида. Цилиндр, конус и усечённый конус. Шар и его части. Смешанный отдел. Ответы.

Приведём примеры из последнего отдела.

Задача № 507. В равносторонний цилиндр вписан правильный октаэдр, а в него вписан шар. Как относится полная поверхность цилиндра к поверхности шара? (Ответ: 9:2).

Задача № 515. Луночка, ограниченная полуокружностью и дугой в 120°, вращается около линии, соединяющей середины её дуг. Определить поверхность и объём полученного тела, если хорда луночки равна a. (Ответ: $\frac{5}{6}\pi a^2$; $\frac{\pi a^3}{216}(18 - 5\sqrt{3})$).

Задача № 563. Дан бесконечный ряд правильных тетраэдров, из которых каждый следующий имеет вершины в центрах граней предыдущего. Как относится предел суммы объёмов всех тетраэдров к объёму большего из них? (Ответ. 27:26.)

Таким образом, в конце XIX – начале XX веков российская учебная литература по геометрии была весьма разнообразна и представляла для учителя возможность богатого выбора. Для выделенного нами исторического периода были характерны следующие черты:

1. Выделилось два основных направления изложения курса геометрии: строго дедуктивное и с привлечением большей наглядности.

2. Стал складываться определённый круг вопросов по курсам планиметрии и стереометрии. Вместе с тем, учебники отличаются строгостью и стилем изложения, степенью использования наглядных иллюстраций, объёмом содержания и т.п.

3. В учебниках появляются предисловия, в которых авторы подробно объясняют свои позиции, точки зрения на предмет геометрии и обращают внимание на методику её преподавания.

4. Выделяются методические проблемы преподавания школьного курса геометрии, среди них разработка нового содержания, включение элементов истории геометрии, её практических и прикладных аспектов, вспомогательного материала для лучшего восприятия и усвоения учащимися предлагаемых тем, дополнительного материала повышенной трудности для школьников, интересующихся геометрией.

5. В учебниках, помимо теоретических вопросов, стал появляться задачный материал. Начинают издаваться отдельные сборники задач.

6. Разрабатываются следующие классификации геометрических задач: устные и письменные; задачи на доказательство, на вычисление и на построение.

7. Авторы стремятся давать доказательства теорем, решения задач, обоснование изучаемых фактов, исходя из геометрических соображений. При этом особо выделяются задачи, которые решаются с помощью применения сведений из тригонометрии.

8. Появляются новые требования к оформлению учебной литературы, например, выделение дополнительного материала (раз-

личные шрифты, звёздочки), предлагаются подробные примеры оформления решения некоторых основных, важных для курса задач, даются ответы, а к задачам повышенной трудности, помимо ответов, предлагаются и указания для поиска решения и т.п. Это направлено на то, чтобы учебник или задачник были удобны для работы, как учителя, так и ученика.

Этот исторический период имел огромное значение, так как фактически был создан свой российский учебник геометрии. Поэтому после 1917 года были переизданы лучшие дореволюционные учебники и задачники, в частности, А.Ю. Давидова, А.П. Киселёва, Н.А. Рыбкина. Последние две названные книги (после доработки) стали стабильными действующими руководствами по геометрии для средней школы почти до конца 60-х годов XX века.

Представленные учебники и задачники по геометрии оказали огромное влияние на преподавание геометрии в российской школе. Они явились образцом для авторов многих последующих периодов. Лучшие их традиции дошли и до настоящего времени, и наша задача не разрушить их, а сохранить, приумножить и передать следующим за нами поколениям.

Литература:

1. *Аничков Д.* Теоретическая и практическая геометрия в пользу и употребление не токмо юношества, из разных авторов собранная. М., 1780.

2. *Буссе Ф.И.* Руководство к геометрии для гимназий. СПб., 1844.

3. *Буссе Ф.И.* Руководство к геометрии для уездных училищ. СПб., 1831.

4. *Ващенко-Захарченко М.Е.* История математики. Исторический очерк развития геометрии. Том 1. Киев: Типография Императорского университета святого Владимира, 1883.

5. *Глаголев А.Н.* Сборник геометрических задач и краткий курс элементарной геометрии. М., 1890.

6. *Головин М.Е.* Краткое руководство к геометрии, изданном для народных училищ Российской империи по высочайшему повелению царствующей императрицы Екатерины второй. СПб., 1782.

7. *Гурьев П.С.* Практические упражнения в геометрии. СПб.; 1844.

8. *Гурьев С.Е.* Морского учебного курса часть первая, содержащая основания геометрии. СПб., 1804.

9. *Гурьев С.Е.* Опыт об усовершенствовании элементов геометрии, составляющий первую книгу математических трудов академика Гурьева. СПб., 1798.

10. *Давидов А.Ю.* Элементарная геометрия в объёме гимназического курса. – 34-е изд. М.-СПб.: Типография В.В. Думнов – насл. бр. Салаевых, 1914.

11. *Евклид*. Начала / пер. с греч. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского. Гостехиздат, 1948–1950.

12. *Ильинский А.Н.* Основания геометрии, составленные по системе императорской Санкт-Петербургской Академии наук академика С.Е. Гурьева. СПб.: Типография А. Смирдина, 1825.

13. *Киселёв А.П.* Элементарная геометрия. М., 1892.

14. *Лобачевский Н.И.* Геометрия // Полн. собр. соч. – Том 2. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

15. *Магалиф Б.* Систематический сборник геометрических задач на вычисление. Планиметрия (Стереометрия). – 7-е (4-е) изд. М.-СПб.: В.В. Думнов – насл. бр. Салаевых, 1914.

16. *Малинин А.Ф.* Курс наглядной геометрии и собрание геометрических задач для уездных училищ. М.: Изд. братьев Салаевых, 1873.

17. *Мерчинский А.* Геометрия. СПб.: Типография Императорской Академии наук, 1870.

18. *Минин В.П.* Сборник геометрических задач. – 15-е изд. М., 1913.

19. *Назаров С.* Теоретическая и практическая геометрия (сочинённая тит. советн. Степаном Назаровым для употребления к геодезии, межеванию и протчего). СПб.; 1772.

20. *Остроградский М.В.* Руководство начальной геометрии. СПб. II общий класс, 1855; III общий класс, 1857; IV общий класс, 1860.

21. *Пржевальский Е.М.* Собрание геометрических теорем и задач. – 9-е изд. М.: Типография Г. Лисснера и Д. Собко, 1909.

22. *Рыбкин Н.А.* Сборник геометрических задач на вычисление. Часть I (Часть II). Планиметрия (Стереометрия). – 10-е (9-е) изд. М.: Школа, 1915.

23. *Рыбкин Н.А.* Собрание стереометрических задач, требующих применения тригонометрии. М.-Петроград: Гос. изд., 1923.

3. ИДЕЯ ФУЗИОНИЗМА В ПРЕПОДАВАНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

Термин фузионизм происходит от латинского слова *fusio* – слияние. Именно так в XIX веке называли слитное преподавание различных школьных предметов, например физики и математики, химии и биологии. Фузионизмом также называли слитное преподавание нескольких разделов математики: алгебры и геометрии; геометрии и арифметики; наконец, планиметрии и стереометрии.

Одни из первых упоминаний о слитном преподавании планиметрии и стереометрии находятся в знаменитом плане Ж. Даламбера (Д'Аламбера) (1717–1783). В середине XVIII века во Франции назревает революция, а коренные социальные преобразования, как правило, сопровождаются реформами образования. Новая французская идеология получила своё отражение в многотомной «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел». Реформаторству подверглись все науки, в том числе и разделы математики. План курса геометрии был изложен Даламбером. Автор восстал против традиционного курса, который преподавался по «Началам» Евклида, и изложил новый подход к изучению геометрии. Новый курс носил более практический характер и содержал элементы совместного изложения начал планиметрии и стереометрии. Он рекомендовал исключить из курса геометрии аксиомы и постулаты. С его точки зрения, они бесполезны в силу своей очевидности. Начинать изложение нужно с рассмотрения тела «как оно есть, а потом показать, что с помощью последовательных отвлечений мы приходим к понятию о теле, обладающем лишь протяжённостью и фигурой, и далее – к поверхности, линии, точке. Прямую и кривую линии вовсе не стоит определять, вследствие трудности, а может быть, и невозможности свести понятия о них к более простым идеям».

Даламбер возражал против пренебрежения в «Началах» к задачам измерения величин (площадей, объёмов) и использованию различных движений. Основными принципами доказательств должны были быть принцип наложения, метод пределов и теория пропорций (например, теорема о равенстве произведений крайних и средних членов). Требуя от курса геометрии простоты и ясности изложения, Даламбер вместе с тем подчёркивал важность чёткости и точности доказательств. Он считал, что чем строже вывод, тем он доступнее, т.к. подлинная строгость состоит в выводе теорем простым прямым путём из простейших принципов. Любопытно заметить, что он считал целесообразным построение различных курсов геометрии в зависимости от потребностей самих учеников. Одним нужен курс практической геометрии, другим строгие рассуждения и теоретическое руководство.

Статьи Даламбера о преподавании геометрии получили широкую популярность во Франции и за её пределами. Его замыслы нашли частичную реализацию в следующих трёх известных сочинениях.

В 1770 году вышел шеститомный труд «*Cours des mathematiques*» Э. Безу (1739-1783). Курс геометрии в нём предназначался для слушателей артиллерийских и морских учебных заведений, носил в основном повествовательный характер и использовался как пропедевтический курс геометрии.

В 1794 году вышла книга «*Elements de geometria*» А.М. Лежандра (1752–1833). В ней автор счёл необходимым вернуться к античной строгости построения системы геометрии. В частности, он восстановил аксиомы и постулаты. Вместе с тем он широко применял алгебру при изучении геометрии, т.е. осуществлял слитное преподавание алгебры и геометрии, но стереометрию традиционно рассматривал после планиметрии. В первой части курса предлагались пересекающиеся прямые, треугольники, параллелограммы, во второй – круг и измерение углов, в третьей – теоремы о подобии и измерении площадей «прямолинейных» фигур. Четвёртая посвящена правильным многоугольникам и измерению окружности и круга, пятая – плоскостям и телесным (т.е. многогранным) углам, шестая – многогранникам, седьмая – шару и сферическим треугольникам и, наконец, последняя, восьмая – цилиндру, конусу и шару. Заметим, что в многочисленных изданиях учебника Лежандра (их было только 20 при жизни автора) делались попытки доказательства пятого постулата Евклида. Причём, в каждом новом издании Лежандр давал новое «доказательство», которое опровергал в последующем.

В 1803 году вышли «Начала» С.Ф. Лакруа (1765–1843). Хотя они легко читались и были весьма содержательны, предназначалась эта книга для углублённого изучения геометрии.

Работы Даламбера и его последователей оказали большое влияние на преподавание геометрии. Они были переведены на многие европейские языки, в том числе и на русский.

План Даламбера стал известен в России. Он произвёл неизгладимое впечатление на Н.И. Лобачевского (1792–1856), которому очень понравилась идея слитного преподавания плоской и пространственной геометрии. В 1823 году им был написан учебник «Геометрия», который историки математики называют одним из первых фузионистских курсов геометрии. Книга содержит следующие главы:

1. Измерение линий.
2. Об углах.
3. О перпендикулярах.
4. Измерение телесных углов. О правильных многоугольниках и телах.
5. Об одинаковости треугольников.
6. Об измерении прямоугольников.
7. Об измерении треугольников и других фигур.

(Другие фигуры, имеются в виду трапеции и параллелограммы).

8. О параллелограммах.
9. Об измерении призм.
10. Об измерении пирамид и всех тел, ограниченных плоскостями.
11. Измерение окружности и площади круга.
12. Об измерении объёма цилиндра и конуса, поверхностей прямого цилиндра и прямого конуса.
13. О величине объёма и поверхности шара.

В книге рассматриваются вопросы плоской геометрии и сразу предлагаются аналогичные утверждения, относящиеся к пространству. Например, во второй главе представляются окружность-круг и сфера-шар. В третьей – рассматривается взаимное расположение плоскостей, а в четвёртой – углы между пересекающимися прямыми и телесные (многогранные) углы. Здесь же представлены треугольник и тетраэдр, многоугольник и многогранник, правильный многоугольник и правильный многогранник. Справедливости ради, надо отметить, что данный курс, как подчёркнуто в предисловии, предназначен для читателей, уже усвоивших основной школьный курс геометрии. Таким образом, эта книга адресована студентам, преподавателям, всем интересующимся математикой и вопросами её преподавания. Большой заслугой Н.И. Лобачевского является то, что он написал не просто теоретическую статью с изложением идей фузионизма, а разработал и представил единый фузионистский курс геометрии. В этом непроходящая ценность и огромное значение данного труда.

В первой половине XIX века фузионизм ещё не был популярен в России, и работа Н.И. Лобачевского практически осталась незамеченной. В то же время эти идеи были весьма популярны в Западной Европе. Этому в большой степени способствовали исследования французского математика Г. Монжа (1746–1818), в частности его классическое сочинение «*Geometrie desecriptive*» («Начертательная геометрия»). В нем систематизирован накопленный значительный, но разрозненный, материал по решению различных конструктивных задач стереометрии известными планиметрическими построениями. Например, рассматривается задача о проведении касательной плоскости к трём данным («по положению и величине») сферам. При её решении рассматривается связь теоремы о центрах «внешнего подобия трёх кругов на плоскости, взятых попарно, с предложением о проведении касательной плоскости к трём шарам, если эти круги рассматривать как большие круги данных шаров, а касательные к ним, как образующие конических поверхностей, имеющих с данными шарами попарное касание». Другим примером является рассмотрение свойств плоских конических сечений, которые получаются как сечения конуса плоскостью.

Последователи Г. Монжа – Ш. Брианшон (1783–1864), Ж. Понселе (1788–1867), М. Шаль (1793–1880), К. Штаудт (1798–1869) и др., – активно содействовали развитию проективной геометрии, в которой слияние планиметрии и стереометрии имело широкое практическое применение, что способствовало распространению фузионизма в геометрии. Заметим, что при этом фузионизм не проникал в элементарную геометрию, её преподавание велось по традициям «Начал» Евклида, т.е. сначала излагалась планиметрия, затем стереометрия.

В 1825 году известный французский математик Ж. Жергонн (1771–1859) (он, кстати, открыл в проективной геометрии принцип двойственности) написал статью о необходимости слитного преподавания планиметрии и стереометрии, в которой поднял вопрос о неестественном, с его точки зрения, делении геометрии на плоскую и пространственную, что плохо влияет на умственное развитие учащихся. Эта статья была опубликована в его собственном математическом журнале «Анналы Жергонна», которым он руководил в период с 1810 по 1831 гг. Именно Жергонн первый предложил запись аналогичных утверждений для плоскости и пространства в два столбца, приём, которым стали пользоваться многие авторы последующих работ. Приведём пример.

Окружностью называется множество точек плоскости, одинаково удалённых от данной точки, принадлежащей этой же плоскости.	Сферой называется множество точек пространства, одинаково удалённых от данной точки.
Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.	Около любого тетраэдра можно описать сферу и притом только одну. В любой тетраэдр можно вписать сфере и притом только одну.
Многоугольник называется правильным, если у него равны все стороны и равны все углы.	Многогранник называется правильным, если все его грани являются правильными многоугольниками и все его двугранные углы равны.

Спустя 19 лет после статьи Жергонна в 1844 году были опубликованы ещё две работы по интересующей нас теме, а именно: «Аналогии элементарной геометрии, геометрии плоскости и геометрии пространства» А. Машистрея и книга Бретшнейдера «О преподавании геометрии в гимназиях». Автор второй названной работы чётко объяснил свою позицию, почему он считал слитное изучение планиметрии и стереометрии более предпочтительным по сравнению с общепринятым последовательным изучением этих разделов геометрии. В частности, им были высказаны следующие мысли:

1) Очень вредно молодой ум ученика долго задерживать на изучении плоской геометрии, так как от этого замедляется развитие пространственного представления, а от этого и развитие вообще.

2) Метод обучения геометрии, основанный на отделении планиметрии от стереометрии, как показывает опыт, не даёт тех результатов, каких можно достигнуть с помощью метода слияния.

Несмотря на то, что современники очень высоко оценили эти произведения, практически они не нашли сторонников и, как следствие этого, не были внедрены в учебный процесс школы. Правда, справедливости ради, заметим, что идеи Бретшнейдера имели одного верного последователя в лице датского педагога А. Стена, который написал соответствующий учебник по геометрии и очень пропагандировал его в Дании. Эта история описана в статье В.М. Фесенко «О слиянии планиметрии со стереометрией», которая была опубликована в журнале «Математическое образование» (1913. – № 1. – С. 19–24). Таким образом, основные достижения фузионизма в преподавании геометрии и этапы развития этой идеи были хорошо известны в России.

Во второй половине XIX века фузионизмом в геометрии стали увлекаться в Италии. Например, в 1884 году вышли «Элементы геометрии» туринского профессора Р. Паоли. В этом труде чётко проведена идея слитного преподавания планиметрии и стереометрии. В предисловии автор говорит о мотивах, побудивших применить этот метод в изложении геометрии. Он говорит о том, что много аналогий существует между некоторыми плоскими и пространственными фигурами и что, изучая их раздельно друг от друга, мы отказываемся видеть то, что даёт полная аналогия между ними и должны возвращаться к излишним повторениям. Кроме того, каким образом мы можем найти свойства линии на поверхности, не пользуясь геометрическими элементами расположения вне этой линии или поверхности? Мы ограничиваем таким образом свои силы и добровольно отказываемся от научного материала, с помощью которого можно упрощать построения и доказательства. Как в самом деле данный отрезок разделить пополам, не выходя из пределов самого отрезка? Пользуясь геометрическими элементами, расположенными в той же плоскости, мы легко можем выполнить построение, необходимое для решения задачи и т.д.

Как видим, в представленной книге слитное изложение планиметрии и стереометрии носит вполне определенные дидактические функции, направленные не только на оживление преподавания геометрии, но и на уменьшение числа постулатов и теорем, более простые доказательства некоторых утверждений, выяснение внутрипредметных связей между разделами геометрии. Например, в этой книге совместно изучается материал о линейных и двугранных углах; многоугольниках и многогранниках; круге и шаре; площади и объеме и т.п.

Дело Паоли продолжили его ученики – Г. Лаззери и А. Боссани, которые в 1887 году выпустили фузионистский курс геометрии, предназначенный для средней школы (второе издание вышло в 1898 году). В предисловии авторы замечают: «Метод слияния двух геометрий ещё не так давно казался утопией, теперь же он подаёт большие надежды в недалёком будущем стать классическим методом преподавания элементарной геометрии». Начиналось повествование с изложения семи постулатов: 1-й – о геометрических образах; 2-й и 3-й – постулаты движения; 4-й – о делимости на части пространства; 5-й и 6-й определяли соответственно прямую и плоскость; 7-й постулат определял взаимное расположение прямых, а также плоскостей.

Эта работа вызвала в Италии большой интерес в педагогической среде. На заседаниях возникшего тогда общества педагогов средних школ «Mathesis», поставившее себе целью улучшение преподавания математики, широко обсуждался вопрос о полезности использования метода слияния планиметрии и стереометрии. Далеко не все приветствовали и поддерживали фузионизм в геометрии. В частности, категорически против него выступило очень влиятельное общество педагогов Милана. Известный математик Дж. Веронезе (1854–1917) считал, что не следует увлекаться фузионизмом в самом начале изучения геометрии. В 1900 году им была написана книга «Элементы геометрии», представленная на II Международном конгрессе математиков. Он проходил в Париже в августе 1900 года и прославился тем, что на одном из его заседаний выступил Д. Гильберт (1862–1943) со своим знаменитым докладом о 23 математических проблемах, определивших основные направления развития математики XX столетия.

Дж. Веронезе в своём выступлении, в частности, сказал: «В преподавании следует идти от частностей к общему, от простого к сложному. Евклид, Лежандр и большинство современных авторов сполна рассматривают геометрию на плоскости до начала изучения геометрии пространства. Я полагаю, что для начала следует избрать Ректиметрию (геометрию прямой), по крайней мере, в том объёме какой охватывает её основные положения. Когда эти принципы установлены, можно рассматривать такие специальные теоретические вопросы, как равенство и равновеликость, подобие, измерение и т.д. уже одновременно на плоскости и в пространстве. Я не разделяю здесь точки зрения фузионистов, требующих чтобы при изучении подобных теоретических вопросов геометрические образы трёх измерений вплетались в доказательства планиметрических теорем, но держусь того взгляда, что во множестве случаев доказательство может быть прямо распространено с плоскости на пространство. Этот способ изложения приведёт к экономии времени и даст возможность лучше вникнуть во взаимоотношения, существующие между различными частями одной и той же теории».

Немецкий математик Ф.Х. Клейн (1849–1925), автор всемирно известной работы «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований» (больше известной под названием «Эрлангенской программы», 1872), увлекался вопросами преподавания математики. В течение сорока лет (с 1876 года) он был главным редактором журнала «Математические анналы». Перед первой мировой войной организовал Международную комиссию по реорганизации преподавания математики. На русский язык переведена его популярная книга «Элементарная математики с точки зрения высшей: Лекции, читанные в Геттингенском университете». Второй её том полностью посвящён геометрии. Завершает его статья Клейна, которая называется «О преподавании геометрии». В ней, в частности, предлагается несколько требований, которые следует предъявлять к «здоровому школьному преподаванию геометрии». Последнее, пятое требование непосредственно относится к фузионизму в геометрии. Автор говорит: «Я желал бы отметить здесь ещё одну полезную методическую точку зрения, а именно… тенденцию к слитному преподаванию планиметрии и стереометрии, цель которого – помешать одностороннему усовершенствованию в планиметрии при одновременном пренебрежении к развитию трёхмерной пространственной интуиции. В том же смысле надо понимать также и требование слитного преподавания арифметики и геометрии: я не считаю желательным полное слияние этих областей, но они не должны быть столь резко разграничены, как это часто теперь происходит в школе».

В конце XIX века идеи фузионизма стали необычайно популярны в России. В это время у нас началась одна из самых крупных реформ школьного образования. Сложилась такая ситуация, когда, с одной стороны, педагогическая и методическая науки накопили значительный материал в области теории воспитания и обучения, а с другой, имела место устаревшая общеобразовательная система. Она характеризовалась ранней специализацией учащихся (реальные училища и классические гимназии), которая не соответствовала достижениям педагогической психологии. Заметим, что в этой области у нас были получены глубокие результаты. В качестве примера достаточно обратиться к работам П.Ф. Каптерева (1849–1922), его «Педагогической психологии» (СПб; 1876, переиздана в 1883 году). Сложившееся противоречие, естественно, не могло не привести к новой реформе образования. Преобразования касались как всей системы обучения в целом, так и каждого предмета в отдельности. Наиболее серьёзным изменениям при этом подвергся курс математики. Своеобразным итогом движения за реформу были исторические Всероссийские съезды преподавателей математики.

Первый съезд проходил в Петербурге с 27.12.1911 г. по 3.1.1912 г., а второй ровно через два года в Москве. На них впервые учителя и учёные-математики имели возможность обсудить важнейшие проблемы преподавания математики в школе. Поражает высокоавторитетный состав съездов. Достаточно назвать фамилии таких видных педагогов-математиков, как А.М. Астряб, С.А. Богомолов, Н.А. Извольский, А.Р. Кулишер, К.Ф. Лебединцев, С.И. Шохор-Троцкий и мн. др. Это позволило на высоком научно-методическом уровне подойти к решению вставших перед школой проблем. По-существу, съезды подытожили всю огромную работу в области преподавания математики в школе и выработали далеко идущие перспективные планы на будущее. Результаты съездов поражают обилием интересных идей, находок, решений проблем, многие из которых актуальны и в наши дни. Это непосредственно касается и обсуждаемой нами проблемы фузионизма в преподавании школьного курса геометрии, причём, особый интерес представляет первый съезд.

Уже на первом пленарном заседании был заслушан большой доклад известного математика, профессора С.А. Богомолова «Обоснование геометрии в связи с постановкой её преподавания». В нём автор подробно остановился на общем значении курса геометрии и его основных целях. В частности, он сказал: «Что касается самих учащихся, то для них геометрия является наиболее усвояемым и интересным отделом математики; преподавание геометрии облегчается и оживляется чертежами, призывом к воображению... геометрия имеет выдающееся значение, как предмет общего и специально-математического образования. Помимо сообщения начальных геометрических сведений, мы видим цель её преподавания в развитии двух умственных способностей: интуиции пространства и логического мышления». Далее «…конечно, всякий преподаватель оживит урок ссылкой на факты, известной ученикам области; но нам кажется, что главная задача выполнения фузионистских чаяний лежит на представителях прикладных наук: они должны ставить свои предметы в теснейшую связь с математикой, памятуя слова Канта, что во всякой отрасли изучения природы мы постольку имеем науку, поскольку встречаем в ней математику. Представители же нашей специальности могут главное своё внимание, помимо обучения технике математического знания, посвятить развитию и дисциплинированию ума учащихся; логически развитой ум есть наиболее могучее орудие человека, важнейший фактор его прогресса».

В соответствии со сказанным С.А. Богомолов предложил разбить весь курс геометрии на две части, а именно: пропедевтическую и систематическую. Причём, первая должна иметь целью развить пространственную интуицию и накопление геометрических знаний. Учащиеся должны проделать в этом курсе тот путь, каким в глубокой древности шло человечество, закладывая основы геометрической науки. При этом самым широким образом надо использовать их способность пространственного воображения, её постоянное упражнение должно служить лучшим средством к её развитию. Более того, в пропедевтическом курсе необходимо отвести видное место так называемому лабораторному методу, т.е. экспериментированию всякого рода; последнее может происходить при помощи построений с простейшими геометрическими приборами, построений на клетчатой бумаге, вырезания и накладывания фигур и т.п.

Таким образом, по мнению С.А. Богомолова, именно начальный курс геометрии должен носить фузионистский характер. Эта идея была поддержана и одобрена съездом и широко на нём обсуждена.

Итак, съезд пришёл к единодушному выводу о необходимости слияния планиметрии и стереометрии в курсе начальной геометрии, предшествующей изучению систематического курса, что и нашло отражение в его резолюции. Однако было отмечено, что в основном курсе геометрии, где должна происходить чёткая систематизация учебного материала, слияние, смешение курсов планиметрии и стереометрии нецелесообразно, так как это ведёт к нарушению основополагающих педагогических принципов систематизации и последовательности обучения. Более того, в систематических курсах не следует смешивать различные разделы математики, например, алгебру и геометрию, поскольку в таких фузионистских курсах невозможно обеспечить последовательное и непрерывное прохождение учебного материала каждого из них.

Дальнейшее развитие математического образования в России подтвердило правильность подобного подхода. К 60-м годам XX столетия были созданы прекрасные курсы начальной (пропедевтической, подготовительной) геометрии для младших школьников, в которых сочеталось изучение плоских и пространственных фигур. Одним из первых таких учебников нового поколения был учебник математики для 5–6 (4–5)-х классов известных авторов: Н.Я. Виленкина, А.С. Чеснокова, С.И. Шварцбурда, написанный в период реформы математического образования конца 60-х – начала 70-х годов.

В систематическом же курсе геометрии планиметрия и стереометрия изучались традиционно последовательно. Однако в конце курса планиметрии предусматривалась глава «Начальные сведения из стереометрии», которая знакомила учащихся с основными темами геометрии старших классов, а именно, с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве, многогранниками, фигурами вращения (см: А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов «Геометрия: учебное пособие для 6–8 классов средней школы).

Идеи фузионизма не были популярны в период той реформы математического образования. Было проведено только одно исследование по данной теме. Это кандидатская диссертация Я.М. Жовнира «Фузионизм в системе преподавания геометрии в средней школе» (Киев; 1970). В ней автор выявил «фактическую, внутреннюю и логическую связь между планиметрией и стереометрией», на основании чего разработал экспериментальный фузионистский курс геометрии в 7–9 (6–8) классах.

Приведём программу, предложенную Я.М. Жовниром для слитного преподавания планиметрии и стереометрии.

7 класс. Геометрические тела. Типы линий. Плоскость. Аксиомы плоскости и следствия из них. Понятие движения в геометрии. Углы (двугранные и плоские). Окружность и круг. Сфера и шар. Развёртки поверхностей тел. Многогранные углы и многоугольники. Симметрия (в пространстве и на плоскости). Проекции и их виды. Программой также предусмотрены соответствующие работы на местности.

8 класс. Элементы математической логики. Равенство треугольников и тетраэдров. Практические занятия на местности. Параллелизм плоскостей и прямых. Вектор; сложение и вычитание векторов; умножение вектора на число; проекция вектора на ось (плоскость). Четырёхугольники, призмы, пирамиды. Окружность и сфера. Простейшие геометрические места точек в пространстве и на плоскости.

9 класс. Тригонометрические функции острого угла. Решение прямоугольных треугольников. Скалярное произведение векторов и его свойства. Углы в окружности. Вписанные и описанные многоугольники и многогранники. Площади фигур и поверхностей. Объём многогранников. Пропорциональность отрезков. Тела вращения и вычисление их поверхностей и объёмов (без доказательств). В программу 8 и 9 классов включены практические работы на местности.

В диссертации приводится программа и для 10–11 (9–10) классов. Она составлена с учётом условий преемственности программы для 7–9 классов, составленной в духе фузионизма, и включает в себя следующие вопросы. 10 класс: Пространственная система координат. Векторы в пространстве. Разложение вектора по направляющим единичным векторам. Расстояние между точками в пространстве. Эллипс. Площадь эллипса. Уравнение плоскости и сферы. 11 класс: Группы преобразований. Аксиоматический метод. Некоторые понятия геометрии Лобачевского и Римана.

К разработанным учебникам были написаны также «Сборник задач и упражнений» и «Рабочая тетрадь», т.е. создано полное методическое обеспечение для проведения уроков с учащимися.

Хотя эта работа написана ярко, она не нашла сторонников и последователей, так и оставшись красивым экспериментальным методическим исследованием. Тем самым была убедительно продемонстрирована непрактичность данной идеи в масштабах её внедрения в работу массовой школы.

Остановимся ещё на двух важных для обсуждаемой нами проблемы работах. Первая включала в себя разработку фузионистского курса и называлась «Геометрия. Систематический курс». Её написал С.А. Богомолов и в ней он реализовал те идеи, которые высказал на первом Всероссийском съезде преподавателей математики (тезисы доклада приведены выше). В книге выделены две части, а именно:

1. Геометрия положения.
2. Геометрия меры.

Курс построен на аксиоматической основе. Так, в первой части даются три основные неопределяемые понятия – точка, прямая, плоскость; даны аксиомы принадлежности, расположения и аксиома Паша; рассмотрены основные фигуры (образы) – угол, треугольник, многоугольник, телесный (многогранный) угол, тетраэдр и многогранник. Во второй части представлены ещё 4 аксиомы меры и аксиома непрерывности. Здесь рассмотрены равенство углов, треугольников; свойства плоских и пространственных фигур; вписанные и описанные фигуры; измерение геометрических величин и др. Автором объединены доказательства некоторых теорем из планиметрии и стереометрии, например, в параграфе «Круг и шар» приводится следующая теорема: «Прямая, проходящая через центр шаровой поверхности, пересекает её в двух и только в двух точках. То же самое имеет место для окружности – при условии, что прямая лежит в её плоскости».

В этой книге практически отсутствуют задачи. Для этой цели, как замечает сам автор, вполне подходят имеющиеся сборники задач. В то время, как мы знаем, было принято разделять учебник, где предлагалась теория, и отдельно к нему прикладывался задачник.

Специально отметим и подчеркнём, что эта книга С.А. Богомолова не была предназначена для учащихся средней школы. Она рекомендована в качестве пособия для самообразования учителям математики и студентам математических факультетов педагогических вузов, т.е. тем, кто уже знаком с основным школьным курсом геометрии. Таким образом, она предназначалась для повышения уровня геометрической подготовки, для тех, кто интересуется геометрией и её преподаванием.

Вторая книга, на которую мы обратим внимание, это «Геометрия» американских авторов Э.Э. Моиза и Ф.Л. Даунса. Книга написана в 1963 году (в 1972 году в издательстве «Просвещение» она была опубликована на русском языке) и представляет собой учебник геометрии, который использовался в старших классах американских средних школ. Он содержит разделы, относящиеся, как к планиметрии, так и стереометрии. Предлагаемый материал соответствует полной программе школьного курса геометрии. Основными особенностями является следующее:

1. Рано вводятся основные понятия стереометрии (уже в третьей главе, всего их 17), которые с этого момента активно используются. Таким образом, к тому времени, когда авторы обращаются к систематическому изучению стереометрии (глава 8) учащиеся уже имеют большой и разнообразный интуитивный опыт работы с пространственными объектами.

2. Система координат на прямой вводится в главе 2, расстояния и углы измеряются числами, при действиях с которыми применяются алгебраические методы. Это позволяет легко ввести в главе 13 (после подобия и теоремы Пифагора) систему координат на плоскости.

3. Теория измерений площадей авторы предлагают приблизительно в середине курса. Они считают, что, во-первых, понятие площади является, довольно, лёгким. Во-вторых, оно оказывается полезным в оставшейся части теории курса, например, даёт простое доказательство теоремы Пифагора, а также теоремы о пропорциональных отрезках, на которую опирается теория подобия.

4. Почти в каждом случае, прежде чем формально определить какое-либо понятие, авторы объясняют его интуитивным путём неформального обсуждения (чаще всего с помощью рисунка).

5. Рисунки в книге играют существенную роль, их много, они служат для увеличения предлагаемой информации. Многие из них снабжены необходимыми замечаниями, пояснениями и т.п. Имеется даже специальный параграф, который называется «Передача информации с помощью рисунков».

6. Обращает на себя внимание то, что многие аксиомы и теоремы имеют названия, например аксиома измерения углов, аксиома масштабной линейки или теорема о двух окружностях («Пусть две окружности радиусов a и b, расстояние между центрами которых равно c. Если каждое из чисел a, b и c меньше суммы двух других, то эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих по разные стороны от прямой, проходящей через их центры»), теорема о шарнире («Если две стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам другого треугольника и если, угол, заключённый между указанными сторонами первого треугольника, больше угла, заключённого между соответствующими сторонами второго, то третья сторона первого треугольника больше третьей стороны второго треугольника») и т.д.

7. Авторы специально подчеркнули, что одна из основных целей книги состоит в том, чтобы научить каждого учащегося пользоваться математическим языком, т.е. самому понимать математическое содержание предлагаемого материала.

Книга прекрасно написана, оформлена, имеет исторические экскурсы, например, о том, как Эратосфен измерил Землю, о неразрешимости некоторых классических задач на построение, о жизни и творчестве многих крупных математиков, таких как Л. Эйлер, Р. Декарт, Н.И. Лобачевский и мн. др.

Сегодняшнее состояние общества и математического образования в школе не является таким благоприятным, как раньше. Чтобы сохранить достигнутый отечественной школой уровень математического образования, необходимо, в первую очередь, заботиться о том, не приведёт ли то или иное изменение к резкому снижению этого уровня или даже полной его потере. Опасения за судьбу школьного математического образования высказывают многие видные современные математики. Например, академик

В.И. Арнольд в статье «Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции» (Известия. – 1998. – № 7. – С. 5) пишет: «Традиционно высокий уровень российской математики всегда был основан на хорошем математическом образовании «по Киселёву»… К сожалению, сейчас уровень математического грамотности страны в целом начал катастрофически падать … Доказывать необходимость математической грамотности для каждого культурного человека как-то странно». Заметим, что в большой степени это связано с уменьшением числа часов, отводимых на математику и, как следствие, значительная перестройка её курсов.

Идея фузионизма в геометрии весьма привлекательна, сама по себе очень красива, нестандартна по отношению к традиционной сложившейся системе последовательного изложения курса геометрии от планиметрии к стереометрии, восходящей ещё к «Началам Евклида».

Эта проблема была блестяще разрешена в пропедевтических курсах геометрии младших классов, основной целью которых была подготовка к изучению систематического курса геометрии основной школы.

Однако многочисленные попытки решения рассматриваемой проблемы, которые велись на протяжении более чем двух веков и заключающиеся в её реализации на систематическом курсе геометрии, не увенчались успехом. Фактически в России в XIX веке было создано одно соответствующее пособие Н.И. Лобачевского и одно в XX веке С.А. Богомолова, но и они были предназначены для читателей, имеющих базовую школьную подготовку по геометрии. Другими словами, это были книги, которые предлагали другой способ построения школьного курса геометрии для тех, кто особо интересовался геометрией и её преподаванием.

Почему же в школе не прижилось слитное преподавание планиметрии и стереометрии в систематическом курсе геометрии? Основная причина заключается в том, что фузионизм противоречит основным дидактическим принципам: от простого к сложному; последовательности; систематичности.

Однако, исходя из рассмотренных и представленных особенностей слитного преподавания планиметрии и стереометрии, можно сделать вывод о том, что метод фузионизма будет весьма полезен и эффективен при проведении заключительного этапа изучения школьного курса геометрии – повторении основного пройденного материала.

В настоящее время школе предстоит сделать выбор концепции преподавания систематического курса геометрии. Каким он будет, покажет время, но ясно, что нельзя игнорировать исторический опыт решения данной проблемы. При этом следует помнить, что фузионистский систематический курс геометрии никогда не был официальным, общепринятым, никогда не имел широкого распространения. Он нравился как интересная, привлекательная идея, альтернативная традиционному курсу. Неслучайно поэтому к идее слитного преподавания планиметрии и стереометрии обращаются в периоды реформ, во времена кризисов и коренных перестроек геометрического образования.

Литература:

1. *Жовнир Я.М.* Фузионизм в системе преподавания геометрии в средней школе: Автореферат дисс. … канд. пед. наук. Киев; 1970.
2. *Смирнова И.М.* Идея фузионизма в преподавании школьного курса геометрии // Математика. 1998. № 17. С. 1, 2.
3. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии. М.: Прометей, 2004. С. 34–50.

4. О НОВЫХ ПОДХОДАХ К ОБУЧЕНИЮ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

Геометрия, как ни один другой предмет, необходима для современного школьного образования.

На протяжении всей истории человечества она служила источником развития не только математики, но и многих других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии.

Многие геометрические проблемы способствовали появлению новых научных направлений. Наоборот, решение многих научных проблем получено с использованием геометрических методов.

Вообще современная наука и её приложения немыслимы без геометрии и её разделов, таких как топология, теория графов, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, компьютерная геометрия и др.

Появление информационных технологий не только не снижает, но и усиливает роль геометрии, поскольку при этом существенно расширяются возможности графического представления материала, компьютерного моделирования.

Известен вклад, который вносит геометрия в развитие пространственного воображения и логического мышления учащихся.

Например, как было отмечено выше, Н.Ф. Четверухин отмечал важность развития пространственных представлений для всех учащихся вне зависимости от того, какую профессию они изберут в дальнейшем [6].

А.Д. Александров выделял в геометрии три составляющие части, а именно, строгую логику, наглядные представления и практику. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга [1, с. 57].

В.Г. Болтянский говорил о том, что природа геометрии предоставляет богатые возможности для воспитания у школьников настоящего эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова. Красота геометрии заключается в её проявлениях в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д., а также в смелых, оригинальных, нестандартных доказательствах, выводах и решениях [2, с. 41].

Отечественной школой накоплен уникальный опыт преподавания геометрии. Учебник по геометрии А.П. Киселёва на протяжении десятилетий оставался образцом строгости, чёткости и доступности изложения геометрии.

Сегодня задача состоит в том, чтобы, опираясь на достигнутый отечественной школой уровень геометрического образования, используя интернет-ресурсы и компьютерные средства, сделать обучение геометрии современным и интересным, учитывающим склонности и способности учеников, направленным на формирование математической культуры, интеллектуальное развитие личности каждого ученика, его творческих способностей, формирование представлений учащихся о математике, её месте и роли в современном мире.

Предлагаем новый учебно-методический комплект по геометрии [4, 5], в котором реализованы следующие принципы.

1. ***Преемственность***. Опора на традиции отечественного геометрического образования, заложенные ещё в учебнике А.П. Киселёва [3].

Неудача реформы школьного геометрического образования, носящей имя А.Н. Колмогорова, связана со слишком резким изменением концепции обучения геометрии, нарушением принципа преемственности. В результате не уцелел ни учебник А.П. Киселёва, ни учебник А.Н. Колмогорова. Качество обучения геометрии в школе стало снижаться.

2. ***Современность.*** Особенность сегодняшнего состояния обучения математике в целом, и геометрии в частности, состоит в противоречии между изменившимися внешними условиями и неменяющемся содержании образования.

С одной стороны, расширяется доступ к образовательным ресурсам. В интернете в открытом доступе можно найти книги, пособия, сборники задач, видеоматериалы и другие ресурсы, которые могут быть использованы в обучении математике.

С другой стороны, программы, содержание учебников и методика обучения геометрии остаются фактически такими же, как и сто лет назад.

Необходимо обновление содержания и методики обучения геометрии, включение в содержание:

– элементов истории;

– научно-популярного и занимательного материала;

– задач с практическим и прикладным содержанием и др.;

– использование компьютерных программ, например, свободно распространяемую программу GeoGebra, позволяющую моделировать плоские и пространственные фигуры, производить над ними различные действия, в том числе и анимировать.

3. ***Наглядность***. Развитие геометрических представлений учащихся.

Одним из основных недостатков действующих школьных учебников геометрии является недостаточная наглядность представления учебного материала. С появлением компьютерных программ существенно расширяются возможности изображения и моделирования плоских и пространственных фигур, что способствует развитию геометрических представлений учащихся. В содержание обучения геометрии необходимо включать лабораторные работы, которые могут быть посвящены изготовлению моделей многогранников из развёрток и геометрического конструктора, изображению пространственных фигур на бумаге, моделированию плоских и пространственных фигур на компьютере и т.д.

4. ***Модульная структура учебников***, предполагающая разбиение учебного материала на модули – совокупности взаимосвязанных тем, носящих локально завершённый характер, обеспечивающий достижение части планируемых результатов обучения. Ориентация не на прохождение учебника, а на достижение результатов обучения, подготовку к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

5. ***Практическая направленность***. Наличие в учебниках примеров и задач с практическим содержанием.

Решение геометрических задач с практическим содержанием позволяет:

– усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии;

– выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать величины и находить их приближённые значения;

– сформировать представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин;

– повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность изучения геометрии.

6. ***Наличие дополнительного научно-популярного материала*** (со звёздочкой) для привлечение школьников к исследовательской и проектной деятельностям.

Среди тем, заслуживающих, на наш взгляд, рассмотрения в школьном курсе геометрии, отметим следующие: кривые, как геометрические места точек; кривые, как траектории движения точек; графы; паркеты; фракталы; золотое сечение; равносоставленность и задачи на разрезание; правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники; тела и поверхности вращения; лист Мёбиуса.

7. Наличие презентаций, методических пособий, дополнительных сборников задач в открытом доступе.

8. Наличие авторского сайта www.vasmirnov.ru, в котором имеются программы и тематические планирования; дидактические материалы; презентации ко всем параграфам учебников; статьи о преподавании геометрии; методические пособия; дополнительные сборники задач; пособия для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ.

Литература:

1. *Александров А.Д.* О геометрии // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62.

2. *Болтянский В.Г.* Математическая культура и эстетика // Математика в школе. 1982. № 2. С. 40–43.

3. *Киселёв А.П.* Геометрия / под редакцией Н.А. Глаголева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс: учебн. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). – 2-е изд. М.: Мнемозина, 2014.

5. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс: учебн. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). – 2-е изд. М.: Мнемозина, 2014.

6. *Четверухин Н.Ф.* О некоторых методологических вопросах преподавания геометрии. М: АПН РСФСР, 1955.

5. О ПОСТРОЕНИИ КУРСА НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ В 5–6 КЛАССАХ

Как это ни покажется странным, вопрос о том, какой должна быть геометрия в 5–6 классах, стал особенно актуален после включения геометрических задач в ОГЭ и ЕГЭ по математике. Именно тогда проявились существенные пробелы в геометрической подготовке учащихся, ликвидировать которые невозможно просто подготовкой к ОГЭ и ЕГЭ. Нужна систематическая работа по учебникам геометрии на протяжении всего периода обучения, направленная на достижение результатов, соответствующих целям и задачам обучения геометрии в школе.

Сегодня в федеральных государственных образовательных стандартах изучение геометрии подразделяется на:

– наглядную геометрию в 5–6 классах;

– систематический курс планиметрии с элементами стереометрии в 7–9 классах;

– систематический курс стереометрии в 10–11 классах.

Важно определить цели обучения геометрии, и каких результатов следует добиваться на всех этапах её обучения.

Курс наглядной геометрии в 5–6 классах имеет давнюю и славную историю, которая насчитывает уже более ста лет. Кратко остановимся на некоторых её страницах.

Первым российским учебником по начальному курсу геометрии стала книга барона М.О. Косинского «Наглядная геометрия» [7]. В предисловии к своему курсу он подробно и убедительно поясняет цель и необходимость введения наглядных курсов геометрии: «В высшей степени важно сгладить переход от наглядного к отвлечённому, сделать его постепенным, начать с рассуждений, основанных на внешних чувствах, и только мало-помалу присоединять к ним рассуждения, заставляющие работать способности внутренние».

Работа М.О. Косинского оказала большое влияние на становление и развитие курса наглядной геометрии. Она открыла целую серию работ, в которую вошли учебники того времени М. Борышкевича [4], Е. Волкова [5], З.Б. Вулиха [6]. Причём, в этих учебниках видное место заняли задачи на построение изучаемых геометрических фигур, на основе которых изучались их свойства.

Большое внимание курсу наглядной геометрии было уделено на Первом и Втором Всероссийских съездах преподавателей математики. Уже на первом пленарном заседании был заслушан большой доклад С.А. Богомолова «Обоснование геометрии в связи с постановкой её преподавания». В нём автор подробно остановился на общем значении курса геометрии и его основных целях. В частности, он сказал [10, том 1, с. 25]: «Что касается самих учащихся, то для них геометрия является наиболее усвояемым и интересным отделом математики; преподавание геометрии облегчается и оживляется чертежами, призывом к воображению... геометрия имеет выдающееся значение, как предмет общего и специально-математического образования. Помимо сообщения начальных геометрических сведений, мы видим цель её преподавания в развитии двух умственных способностей: интуиции пространства и логического мышления». В соответствии со сказанным С.А. Богомолов предложил разбить весь курс геометрии на две части, а именно: пропедевтическую и систематическую. Причём, первая должна иметь целью развить пространственную интуицию и накопление геометрических знаний. Учащиеся должны проделать в этом курсе тот путь, каким в глубокой древности шло человечество, закладывая основы геометрической науки. При этом самым широким образом надо использовать их способность пространственного воображения, её постоянное упражнение должно служить лучшим средством к её развитию. Более того, в пропедевтическом курсе необходимо отвести видное место так называемому лабораторному методу, т.е. экспериментированию всякого рода; последнее может происходить при помощи построений с простейшими геометрическими приборами, построений на клетчатой бумаге, вырезания и накладывания фигур и т.п.

Одним из самых значительных выступлений по этому поводу был доклад А.Р. Кулишера «Начальный (пропедевтический) курс геометрии в средней школе. Его цели и осуществление» [10, том 1, с. 377–413]. В нём, прежде всего, указаны недостатки систематического курса геометрии, основным из которых, с точки зрения докладчика, является то, что изучение геометрии начинается поздно и не с рассмотрения пространственных фигур, а «ребёнок живёт главным образом в мире разного рода многогранников с прямыми, по большей части, углами, чаще всего в мире прямоугольных параллелепипедов, кубов и немногих круглых тел (причём, ему известны, самое большее, названия куба и шара), мы склонны думать, как это подтверждается многочисленными наблюдениями преподавателей практиков, что тела для детей «проще», чем прямые и плоскости» [там же, с. 380].

Охарактеризовав наиболее значимые пропедевтические курсы геометрии, А.Р. Кулишер предложил критерии, которым должен удовлетворять курс геометрии, чтобы его по праву можно было считать подготовительным курсом геометрии [10, том 1, с. 409]:

1. Пропедевтический курс геометрии должен удовлетворять всем строгим требованиям общей дидактики, принимающей во внимание особенности того или иного возраста и в силу этого основанной на разумной (не утрированной) самодеятельности учащихся.

2. Материал, изучаемый здесь, не должен быть очень велик. Всё рассмотренное должно стать прочным достоянием учащихся и перейти при посредстве планомерной классной (отчасти домашней у ребёнка работы) в область твёрдых навыков.

3. Слово должно сопутствовать всему тому, что выполняет мысль и рука учащегося.

4. Материал должен быть связан с теми пространственными представлениями, которые ребёнок вынес или может вынести из повседневного опыта, а также с некоторыми сторонами строительного и инженерного искусства и творений природы.

5. Изучаемые объекты должны быть связаны известной зависимостью; возникновение новых образов из старых весьма важно. Образы трёх измерений должно целесообразно сочетаться с изображением фигур на плоскости.

6. На материал должны влиять, в известной мере, приёмы мышления новых геометров (текучесть геометрических образов).

7. В нём должны всплывать рассуждения и обобщения доказательного характера.

8. Тщательно продуман должен быть переход от начального курса к следующей части занятий геометрией.

Следует специально подчеркнуть, что автор не только провозгласил эти тезисы, но и полностью реализовал их в блестящей серии своих последующих работ, среди которых «Начальный курс геометрии в средней школе» ([8]), а также: Учебник геометрии. Часть I. Курс подготовительный. – СПб.; 1914; Методика и дидактика подготовительного курса геометрии. – Петроград; 1918.

Ещё одним выдающимся вкладом в постановку курса наглядной геометрии был курс А.М. Астряба [2]. В предисловии автор говорит о том, что наиболее сложным и трудным является развитие у детей геометрических представлений и изучение пространственных фигур, поэтому курс начинается с изготовления простейших тел – куба, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра, пирамиды, конуса. Затем рассматриваются свойства каждой представленной фигуры. Этому посвящена вся первая часть книги. Во второй части изучаются плоские фигуры – прямая, угол, окружность и круг, треугольник, прямоугольник и квадрат. В заключительную, третью часть, включены вопросы измерения геометрических величин – вычисление площадей и объёмов. В основу разработки данного курса автором были положены следующие соображения [там же, с. 5].

Первой стадией познания геометрических форм является непосредственное восприятие их, поэтому необходимо, чтобы в нём принимали участие не только глаза, дети должны лепить и рисовать, измерять и клеить, накладывать и разрезать.

Второй стадией психологического процесса познания геометрической формы является возникновение в детском сознании геометрических образов.

Наконец, в третьих, внимание и интерес у детей могут поддерживаться только в случае, когда курс будет согласован с особенностями детской природы – деятельной и творческой.

К данному курсу автором был написан специальный задачник [1]. Вот примеры нескольких наиболее типичных заданий из него:

– Назовите несколько предметов, имеющих форму прямоугольной призмы.

– Приходилось ли вам когда-нибудь сидеть внутри прямоугольной призмы?

– Вырежьте из картофеля или мыла прямоугольную призму.

– Я дам каждому из вас 12 палочек. Склейте воском концы их так, чтобы получилась прямоугольная призма.

– Нарисуйте на бумаге вашу призму, сделанную из палочек.

Дальше ребятам предлагается склеить из данных развёрток различные многогранники, в частности, среди которых все пять правильных многогранников и догадаться, почему они получили такие названия: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Идеи о преподавании курса наглядной геометрии А.М. Астряб развил и изложил в своей «Методике преподавания наглядной геометрии» (которая вошла специальной отдельной главой в известный учебник Н.М. Бескина [3]. В ней определены цели изучения данного курса. Наиболее важной из них является то, что этот курс, во-первых, является подготовительным к изучению систематического курса. Ученики в младших классах должны конкретизировать и накапливать сведения о геометрических фигурах, как плоских, так и пространственных. Во-вторых, этот курс является практическим. Он призван вооружить учащихся практическими знаниями геометрии. Например, дать им представления о различных углах и способах их измерения, вычислении площадей и объёмов, нахождения расстояний, в том числе, до недоступных предметов и т.п.

А.М. Астрябом были выделены особенности преподавания курса наглядной геометрии, который должен быть:

а) конкретным, «созерцательным»;

б) активным, т.е. ученики должны не только внешне смотреть на геометрическую фигуру, но уметь нарисовать её, склеить из развёртки (если это возможно), уметь сознательно анализировать её свойства;

в) небольшим по объёму, но строго последовательным и содержательным, т.е. не надо увлекаться стремлением дать ученикам как можно больше сведений из геометрии в этом начальном курсе, это приведёт к накоплению учениками легко забываемых, несвязанных логически между собой фактов;

г) практическим, в том смысле, чтобы реализовать вторую цель изучения наглядной геометрии, о которой мы говорили выше;

д) развивающим логическое мышление учащихся, в курсе наглядной геометрии нельзя ограничиваться только интуитивным восприятием, ученики должны не только созерцать, но и мыслить;

е) развивающим пространственные представления учащихся.

Литература:

1. *Астряб А.М.* Задачник по наглядной геометрии. М., 1924.

2. *Астряб А.М.* Наглядная геометрия (лабораторный метод изложения). Начальный курс. – 6-е изд. М.-Л.: Гостехиздат, 1923.

3. *Бескин Н.М.* Методика геометрии (с приложением главы «Методика преподавания наглядной геометрии» А.М. Астряба). М.-Л.: Учпедгиз, 1947. С. 255.

4. *Борышкевич М.* Курс элементарной геометрии с практическими задачами / для городских училищ по программе Винницкого съезда учителей. – 2-е изд. Киев, 1893.

5. *Волков Е.* Образовательный курс наглядной геометрии: руководство для преподавателей начальных и городских школ и низших классов средних общеобразовательных заведений. СПб.: Колесов и Михин, 1873.

6. *Вулих З.Б.* Краткий курс геометрии и собрание геометрических задач: Руководство для городских и уездных училищ. СПб., 1873.

7. *Косинский М.О.* Наглядная геометрия: для детей от 9 до 12 лет. – 4-е изд. СПб.: Мартынов, 1902.

8. *Кулишер А.Р.* Начальный курс геометрии в средней школе. СПб., 1914.

9. *Смирнов В.А., Смирнова И.М., Ященко И.В.* Наглядная геометрия. М.: МЦНМО, 2013.

10. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Том 1, том 2, том 3. СПб., 1913.

6. О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ В КЛАССАХ ГУМАНИТАРНОГО ПРОФИЛЯ

В основе профильного обучения лежит идея дифференциации обучения, которая является отнюдь не новой для отечественной школы. Мы проанализировали исторические аспекты дифференциации с начала XVIII века, с правления Петра I, так как именно при нём стала складываться система светского образования. Он наметил основной путь – путь создания широкой сети общеобразовательных школ, специальных школ и училищ. Например, в 1701 году в Москве была создана школа *«математических и навигацких, т.е. мореходно-хитростных наук»*. Она определила *реальное образование* (термин XIX века), т.е. подготовку к профессии. Следующей важной и заметной вехой в дифференциации обучения было создание гимназий (их также называли государственными училищами) разного типа, «чтобы каждый своему приличному состоянию, склонности и определению обучаться мог». Таким образом, в основе дифференциации лежали не только сословные различия, но индивидуальные особенности и интересы учащихся. Были открыты училища следующих типов:

1. Для учёных людей. Они готовили выпускников к поступлению в университеты, в них очень серьёзно был поставлен курс математики, в частности геометрии.

2. Военные училища. Любопытно, что в них геометрия использовалась при изучении таких предметов, как фортификация, архитектура, география (точнее она называлась даже математическая география).

3. Гражданские училища. Здесь изучались арифметика, геометрия и логика. Выпускники этих училищ работали в коллегиях и канцеляриях.

4. Купеческие училища. Геометрия также была здесь обязательным предметом, но большее значение уделялось коммерческой арифметике, составлению и ведению счетов, различных расчётов и т.д.

В XIX веке, наряду с реальным, стало развиваться *классическое гуманитарное образование*.

Появился термин *фуркация* – прообраз современного профильного обучения. Под фуркацией понимали разделение учебных планов и программ с целью такой специализации учащихся, которая сохраняла бы общеобразовательный характер школы.

Надо заметить, что появились и первые учебники по геометрии, отражающие идеи дифференциации. Одним из самых известных учебников рассматриваемого периода является «Элементарная геометрия», А.Ю. Давидова (1823–1886). Эта книга выдержала 39 изданий, первое – в 1864 году и последнее – в 1922 году. Она напечатана двумя шрифтами: крупным обязательный материал, мелким дополнительный, необязательный для всех, предназначенный для углублённого изучения геометрии. Таким образом, в учебнике отражён дифференцированный подход к обучению.

Началом современного этапа развития образования считается декабрь 1988 года, когда в Москве состоялся съезд работников народного образования, на котором был рассмотрен комплекс мер по обновлению школы. В частности, был принят тезис о необходимости дифференцированного обучения, направленного на развитие индивидуальных особенностей учащихся. Это было подхвачено передовыми учёными и преподавателями, которые начали разработку новых концепций дифференцированного обучения.

В основе любой дифференциации лежат индивидуально-психологические особенности учащихся. Исследованием индивидуальных различий занимается специальный раздел психологии, который называется «Дифференциальная психология». Она накопила значительный экспериментальный материал о вариативности как отдельных психических свойствах человека (памяти, восприятия, внимания, воображения, мышления и т.п.), так и о сложных комплексных образованиях (характере, темпераменте, интересах, склонностях, мотивации и т.д.).

В России была своя школа дифференциальной психологии, основоположником которой можно считать А.Ф. Лазурского (1874–1917). Его перу принадлежит фундаментальный труд «Классификация личностей». В нём автор в качестве основного критерия классификации рассматривал уровень проявления активности, приспособления индивида к окружающему миру. И уже опираясь на это, Лазурским были разработаны конкретные программы исследования личности, составление индивидуальных характеристик школьников и методика их обучения.

Говоря об индивидуальных особенностях, конечно, нельзя не сказать о Б.М. Теплове (1896–1965) и его учениках. Именно они пришли к выводу, что наши задатки, склонности, способности определяются свойствами нервной системы. А поскольку она для каждого отдельного человека имеет вполне определённый характер, это создаёт благоприятную почву для формирования устойчивого поведения школьника. Следовательно, задача школы – не навязывать, вообще говоря, ребёнку готовую систему обучения, а, в соответствии с его индивидуальными особенностями, предложить индивидуальную программу, как сейчас принято говорить, траекторию изучения предмета, в частности геометрии.

Выбор профиля обучения зависит в большой степени от выбора будущей специальности, от того, какое место будет занимать в ней, например, математика. Среди специализированных профильных классов наиболее часто встречаются математические, физико-математические, технические; гуманитарные, среди которых исторические, филологические, философские; естественные – биологические, химические, географические; юридические, экономические и др. Для профильных классов должны создаваться специальные курсы математики, в частности геометрии.

В 1997 году издательство «Просвещение» выпустило учебник:

Смирнова И.М. Геометрия 10–11 классы: учебник для классов гуманитарного профиля обучения.

Он был рекомендован Министерством образования РФ и являлся первым учебником Федерального перечня учебной литературы для гуманитарных классов.

В 1998 году его издали как «Московский учебник» для школ г. Москвы.

Позже, в 2004 году издательство «Мнемозина» выпустило переработанный вариант этого учебника, в котором учтены замечания и пожелания учителей математики. Он до сих пор является входящим в Федеральный перечень учебной литературы для базового уровня обучения [1].

Главный вопрос, который ставился при написании учебника геометрии для гуманитарных классов, являлся вопрос о том, каким должно быть преподавание математики в классах гуманитарного профиля? Что общего и чем отличается обучение математике в этих классах? Нужна ли вообще математика в классах гуманитарной направленности? Это не простой и не праздный вопрос, как может показаться, на первый взгляд. Существует мнение, согласно которому, предмет – математика, вовсе не обязателен для учащихся гуманитарных классов. Конечно, с этим нельзя согласиться. Хорошо известно, что математика является объектом общей культуры человека. Она в равной степени нужна художнику и математику. Это связано с тем, что в равной степени необходимо развивать рациональные и иррациональные психические функции человека. К первым, например, относится мышление, ко-вторым – ощущения, интуиция. Для любого человека важно заботиться о равномерном развитии как левого, так и правого полушарий головного мозга. Как известно, левое связано с развитием логического, а правое – художественного мышления. Если одно из них не будет развито, из человека не получится гармонично развитой личности. Математика представляет для этого как раз богатые возможности.

Неправильной следует считать точку зрения, согласно которой преподаванию математики в нематематических классах отводится второстепенная роль. Наоборот, значение математического образования в этих классах не только не меньше, но даже и больше, чем в специализированных математических классах. Связано это с тем, что в гуманитарных классах математическое образование, как правило, завершается, а после специализированных математических классов образование продолжается в соответствующих высших учебных заведениях.

Учащиеся на общекультурном уровне обучения должны получить более широкое математическое образование. В то же время необходимо учитывать гуманитарную направленность личности обучаемых. Это применительно к математике выражается в большей значимости для них вопросов мировоззренческого характера, истории математики и её приложений в различных областях и сферах человеческой деятельности.

Исходя из анализа наблюдений, достаточно большого количества соответствующих анкетирований и тестирований, а также личного опыта преподавания в гуманитарных классах, были выделены следующие психолого-педагогические особенности учащихся гуманитарных классов, а именно:

1. Преобладание наглядно-образного мышления.

2. Восприятие красоты математики направлено у учащихся гуманитарных классов на её проявления в живой природе, в произведениях искусства, через красивые конкретные математические объекты.

3. Внимание на уроке может быть устойчивым в среднем не более 12 минут.

4. Среди компонентов содержания обучения у гуманитариев наибольшим интересом пользуются вопросы истории математики, прикладные аспекты, занимательный материал.

5. Из форм работы на уроке гуманитарии выделяют следующие: объяснение учителем нового материала; лабораторные работы; деловые игры; выполнение индивидуальных заданий с привлечением научно-популярной литературы.

6. Гуманитарии предпочтение отдают активным коллективным методам работы. Например, при решении задач в классе предпочитают дискуссии, в процессе которых происходит поиск решения задач всем классом.

7. У учащихся гуманитарных классов хорошо развито воображение, активно проявляются эмоции.

8. В гуманитарных классах по составу учащихся больше девочек, фактор, который не нашёл в нашей школе пока должного внимания и учёта.

Для того чтобы все это отразить в повседневной школьной практике, мы разработали специальную методику, которую назвали *открытой методикой*. Основными её принципами стали следующие.

1) *Направленность обучения на развитие личности ученика*, формирования для каждого ученика своего собственного индивидуального стиля деятельности.

2) *Вариативность обучения*, предполагающая разнообразие содержания, форм и методов обучения, обеспечивающая возможность выбора учащимися, в соответствии со своими индивидуальными возможностями, склонностями и интересами, посильного учебного материала, предпочтительных форм и методов работы. При этом основное содержание обучения, конечно, не может быть свободным, добровольным или выборочным.

3) *Валидность обучения*, означающая достаточно высокую значимость изучаемого материала для достижения результатов обучения, решения задач образования, воспитания и развития.

4) *Успешность обучения*, понимаемая нами в том, что у каждого ученика должен быть свой, пусть маленький, но собственный успех в обучении. Успех рождает вдохновение, уверенность в своих силах. Задача учителя – помочь каждому своему ученику достичь такого успеха.

5) *Наличие устойчивого интереса к обучению*. Интерес является необходимым условием процесса обучения. Чем ниже интерес, тем формальнее обучение, ниже его результаты. Отсутствие интереса приводит к низкому качеству обучения, быстрому забыванию и даже полной потере приобретённых знаний, умений и навыков. Чем выше интерес, тем активнее идёт процесс обучения, выше результат обучения.

6) *Открытость методической работы учителя*. При этом речь идёт не только о понимании учениками целей обучения, но и о том, чтобы учащиеся представляли себе почему, например, они доказывают некоторую теорему или решают данную задачу, или чем хорошо предложенное индивидуальное задание и т.д. Ученикам должно нравиться построение уроков, их основные этапы, техника проведения каждого из них. Именно в этом смысле мы и называем нашу методику открытой.

Среди методов учебной деятельности, отвечающих предложенным принципам открытой методики, были разработаны и представлены следующие: устная работа, как необходимое условие формирования и развития диалоговой культуры учащихся; различные виды дискуссий на уроках геометрии, деловых игр, индивидуальных заданий; работа с научно-популярной литературой; лабораторные работы по геометрии.

Сказанное мы постарались реализовать в курсе геометрии для гуманитарных классов. Этот курс имеет ряд особенностей. Например, он несколько меньше по объёму по сравнению с традиционным. Оптимальным, на наш взгляд, является курс, рассчитанный на 2 часа в неделю в течение 1,5 лет. Это позволяет, с одной стороны, сохранить основные разделы курса стереометрии, а с другой, – устранить излишнюю детализацию, исключить из рассмотрения свойства и теоремы, носящие вспомогательный характер, тем самым сосредоточить усилия на важнейших аспектах.

В курсе геометрии для гуманитарных классов большое внимание уделяется историческим аспектам, философским и мировоззренческим вопросам. Учащимся предлагаются исторические сведения о Н.И. Лобачевском, центральном проектировании – перспективе, Л. Эйлере, правильных многогранниках – телах Платона, полуправильных многогранниках – телах Архимеда, конических сечениях, объёме пирамиды, Р. Декарте и др.

Большое значение придаётся наглядности, которая является одним из дидактических принципов обучения.

С самого начала изучения геометрии вводятся многогранники (параллелепипед, призма, пирамида, правильные многогранники). Это позволяет, с одной стороны, проиллюстрировать на многогранниках свойства параллельности и перпендикулярности, а с другой – постепенно формировать умения учащихся по нахождению геометрических величин, расстояний и углов.

Предлагаются различные способы изготовления моделей многогранников из развёрток и геометрического конструктора. Моделирование многогранников способствует развитию у школьников пространственных представлений, конструкторских рационализаторских способностей, формированию понятия математической модели, раскрытию прикладных возможностей геометрии; воспитанию эстетических чувств.

Самодельные модели являются средством конкретной наглядности – первой стадии, которая ведёт к абстрактной наглядности – чертежу. Модели могут быть использованы учителем для иллюстрации новых понятий, доказательств теорем, решения задач. Красиво сделанные модели являются украшением любого кабинета математики, рабочего уголка школьников.

Развитие пространственных представлений учащихся предполагает умения правильно изображать основные геометрические фигуры и исследовать их взаимное расположение. Именно от этого во многом зависит успешность изучения геометрии. Поэтому много внимания уделяется вопросам изображения пространственных фигур.

Помимо изображения пространственных фигур в параллельной проекции, рассматриваются методы изображения пространственных фигур в ортогональной и центральной проекциях, приводятся примеры таких изображений (изображение прямоугольного параллелепипеда и сферы в ортогональной проекции, изображение куба в центральной проекции и др.).

Включение в курс геометрии разнообразного учебного материала, учитывающего интересы каждого школьника, способствует повышению интереса и желания учащихся заниматься геометрией. Опираясь на этот интерес и желание, можно преодолеть и известные трудности обучения.

Литература:

1. *Смирнова И.М.* Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень). М.: Мнемозина, 2013.

2. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии. М.: Прометей, 2004. С. 73, 118, 271, 286.

7. ОБ ОБНОВЛЕНИИ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Актуальность обновления содержания школьного математического образования объясняется принятием Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (ФГОС ООО) [1] и опубликованной примерной рабочей программой основного общего образования, разработанной Институтом стратегии развития образовательных технологий Российской академии образования [2], которые задают направление развития школьного математического образования в XXI веке.

Известно, какую большую роль играет геометрия в науке и образовании. На протяжении всей истории человечества она служила источником развития не только математики, но и многих других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии.

Мы исходим из того, что геометрия не только современный раздел математики, но и элемент общей культуры человека, который вносит неоценимый вклад в развитие мышления, воображения, исследовательских способностей.

Она в равной степени нужна математику, физику, химику, биологу, врачу, инженеру, архитектору, художнику и т.п. Это связано с тем, что в равной степени необходимо развивать рациональные и иррациональные психические функции человека. К первым, например, относится мышление, ко вторым – воображение, интуиция. Для любого человека важно заботиться о равномерном развитии как левого, так и правого полушарий головного мозга.

Как известно, левое связано с развитием логического, а правое – художественного мышления. Если одно из них не будет развито, из человека не получится гармонично развитой личности. Геометрия представляет для этого как раз богатые возможности.

Отметим, что появление компьютеров не только не снижает, но и увеличивает роль геометрии, поскольку при этом существенно расширяются возможности графического представления материала.

Задача обновления школьного курса геометрии состоит в том, чтобы сделать курс геометрии современным, интересным, учитывающим склонности и способности каждого ученика, направленным на воспитание математической культуры, интеллектуальное развитие личности, формирование представлений учащихся о математике, ее месте и роли в современном мире.

Для этого в школьный курс геометрии необходимо включать вопросы философского и мировоззренческого характера, истории развития математики, знакомить учащихся с некоторыми современными направлениями её развития и приложениями.

История математики служит для формирования мировоззрения, так как сведения о научных поисках, открытиях помогает увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным.

Элементы истории служат средством нравственного воспитания учащихся, воспитания чувства гордости за достижения отечественной математики.

Наряду с историей математики в школьный курс математики необходимо включать элементы современной геометрии и её приложения.

Считается, что современная геометрия и приложения доступны только учащимся, способным к математике, и могут быть рассмотрены в специальных математических классах.

На самом деле из того, что ученику трудно даются некоторые разделы основного курса геометрии не следует, что он не может и не должен знакомиться с элементами современной геометрии.

Как правило, материал, относящийся к современным разделам геометрии, обладает большей наглядностью, имеет исторические и прикладные аспекты, вызывает повышенный интерес учащихся.

Рассмотрим некоторые темы, заслуживающие, на наш взгляд, изучения в школьном курсе геометрии.

1. Кривые. Кривые с древних времен привлекали к себе внимание ученых и использовались ими для описания различных природных явлений от траектории брошенного камня до орбит космических тел.

В школьном курсе математики в качестве кривых рассматриваются в основном только графики функций. При этом основное внимание уделяется их аналитическим свойствам, возрастанию, убыванию и т.п. Геометрические же свойства остаются в стороне даже для таких известных кривых как парабола, эллипс, гипербола. Знакомство с кривыми, изучение их свойств позволит расширить геометрические представления, углубить знания, повысить интерес к геометрии, создаст содержательную основу для дальнейшего изучения математики, физики и др. наук.

В седьмом классе можно рассмотреть кривые как геометрические места точек. Среди таких кривых: парабола, эллипс, гипербола и др.

В восьмом классе кривые могут определяться как траектории движения точек. Среди таких кривых: циклоида – траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по прямой; кардиоида – траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса; астроида – траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внутренней стороны другой окружности в четыре раза большего радиуса и др.

В девятом классе учащихся можно познакомить с аналитическими способами задания кривых: уравнением в полярных координатах (спираль Архимеда, логарифмическая (золотая) спираль, n-лепестковые розы и др.), параметрическими уравнениями (циклоида, кардиоида и др.).

2. Графы. Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, электрические цепи и др. На языке графов описываются взаимосвязи и отношения между различными объектами.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок более двухсот лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Л. Эйлера, и решение которой привело к созданию нового направления в математике.

Учащихся можно познакомить с основными понятиями теории графов, решить ряд задач и в том числе: задачу Эйлера о кенигсбергских мостах, задачу о трех домиках и трех колодцах, задачу о раскрашивании карт и др.

3. Фракталы. Многие природные объекты и явления имеют не гладкий, а изломанный характер. Среди них листья деревьев, береговая линия, молния и др. Для описания этих объектов не подходят обычные дифференцируемые функции, с которыми имеет дело классический математический анализ. В последние десятилетия возникло и развивается новое направление в математике – фрактальная геометрия. Слово «фрактал» ввел в 1975 г. Б. Мандельброт (от латинского слова «*fractus*» – изломанный, дробный).

Особенностью фракталов является не только их изломанность, но и самоподобность, означающая, что каждая часть фрактала подобна целому. Свойство самоподобности также отражает особенность природных объектов, когда отдельная клетка растения или животного несет в себе полную информацию обо всем организме.

Знакомство учащихся с фракталами позволит расширить и углубить геометрические представления учащихся, понять строение некоторых природных объектов.

4. Золотое сечение. С давних времён люди занимались поисками гармонии и совершенства. Древние греки считали, что мир устроен по законам гармонии, и задачей познания мира, таким образом, является поиск гармонии.

Одним из вопросов, волновавших древних учёных, был вопрос о нахождении наилучшего соотношения неравных частей, составляющих вместе единое целое. Его решение связывают с именем Пифагора, который установил, что наиболее совершенным делением целого на две неравные части является такое, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

В Древней Греции такое деление называлось гармоническим отношением. Интерес к нему необычайно возрос в эпоху Возрождения (XV–XVII вв.). В 1509 году итальянский математик, монах Лука Пачоли (1445 – ок. 1514), друг Леонардо да Винчи (1452–1519), написал целую книгу «О божественной пропорции». Леонардо выполнил иллюстрации к этой книге. В ней воздействие божественной пропорции на человека называлось «существенным, невыразимым, чудесным, неизъяснимым, неугасимым, возвышенным, превосходнейшим, непостижимым». Пачоли назвал гармоническое отношение божественной пропорцией («Sectio Divina»). Термин золотое сечение («Sectio aurea») появился в Германии в первой половине XIX века.

Учащихся можно познакомить с историей золотого сечения, проявлениями золотого сечения в живописи, скульптуре, архитектуре, решить ряд задач с использованием золотого сечения.

5. Паркеты. Паркет представляет собой такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек. Паркетам посвящены некоторые картины голландского художника Мариуса Эшера (1898–1972). Оказывается, что из любого треугольника и четырехугольника можно составить паркет, и существует 11 паркетов, состоящих из правильных многоугольников. Изучение паркетов с учащимися можно провести в виде лабораторной работы, в результате которой каждый ученик может составить свой собственный паркет.

6. Равносоставленность и равносоставленность. Понятие равносоставленности тесно связано с понятием площади. Опираясь на него, выводятся формулы площади параллелограмма, треугольника и т.д. С помощью равносоставленности легко доказываются и некоторые трудные теоремы, например теорема Пифагора. Задачи на равносоставленность и разрезание входят в различные олимпиады и конкурсы по математике. Эта тема, как и предыдущие, имеет и теоретическое содержание, и практические задачи, и приложения.

7. Многогранники. Многогранники, с одной стороны, имеют тысячелетнюю историю. В то же время это современный раздел математики, глубокие результаты в которой получены отечественными математиками: Б.Н. Делоне, А.Д. Александровым, А.В. Погореловым.

Теория многогранников тесно связана с другими современными разделами математики и ее приложениями. Формы многогранников находят широкое применение в архитектуре. В природе форму многогранников имеют кристаллы, свойства которых определяются их геометрическим строением.

Обычно в школьном курсе геометрии среди многогранников изучаются параллелепипед, призма и пирамида, правильные многогранники – тела Платона. Кроме этого, учащихся можно было бы познакомить с выпуклыми многогранники и их свойствами; доказать теорему Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника; рассмотреть полуправильные многогранники – тела Архимеда, звездчатые многогранники – тела Кеплера-Пуансо, Модели многогранников, изготовленные самими учащимися, могут украсить кабинет математики. Многие удивительно красивые пространственные формы придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы – природные многогранники. Свойства кристаллов, которые изучаются на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решётке.

Формы правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса – немой трактат по геометрии, а греческая архитектура – внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остаётся грамматикой архитектора».

8. Поверхности. Лист Мёбиуса. Среди поверхностей, с которыми можно познакомить учащихся отметим: поверхности вращения и в том числе тор и гиперболоид вращения; лист Мёбиуса, бутылка Клейна, как примеры неориентируемых поверхностей; поверхности, заданные аналитически.

9. Комбинаторные задачи. В последнее время интерес к комбинаторике в школьном курсе математики заметно возрос. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в новые стандарты по математике для основной и профильной школ.

Формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников входит в число основных целей обучения математике. Однако обычно, когда говорят об элементах комбинаторики, имеют в виду задачи алгебраического содержания.

10. Экстремальные задачи. Обычно экстремальные задачи, или задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, решаются в курсе алгебры и начал анализа старших классов с помощью производной. Вместе с тем имеется важный класс геометрических экстремальных задач, которые решаются своими методами без помощи производной. Эти задачи, с одной стороны, имеют большое значение, как для математики, так и для ее приложений, а с другой стороны, могут служить пропедевтикой изучения соответствующих разделов курса алгебры и начал анализа.

Знакомство учащихся с экстремальными задачами и методами их решения чрезвычайно важно для математического образования школьников, развития их мышления и формирования соответствующих геометрических представлений.

Среди таких задач: задача Герона об отражении света; задача Штейнера; изопериметрическая задача; задачи оптимального управления и др.

11. Задачи с практическим содержанием. Рассмотрение на уроках геометрии геометрических задач с практическим содержанием позволяет:

– усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии;

– выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать величины и находить их приближенные значения;

– сформировать представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин;

– повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность обучения геометрии.

Литература:

1. Примерная рабочая программа основного общего образования по математике. [Электронный ресурс] – Режим доступа. – URL: http://www.instrao.ru/primer.

2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. [Электронный ресурс] – Режим доступа. – URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027.

8. КРИТЕРИИ ОТБОРА СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КУРСОВ ПО ВЫБОРУ

Предметные курсы по выбору являются одной из форм дифференцированного обучения. В их истории выделено несколько этапов, а именно: 1) 1966–1980; 2) 1980–1988; 3) 1988–2002; 4) 2002–2012; 5) 2012 – н.вр. На первых трёх этапах они назывались факультативными курсами и были созданы для углубления знаний по гуманитарным и естественно-математическим наукам, а также для формирования разносторонних интересов учащихся, т.е. учитывали индивидуальные склонности, задатки, способности учащихся. Подробно исторические аспекты возникновения и развития факультативной формы обучения изложены нами в работе [5, с. 111].

В 2002 году была принята новая Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования (приказ № 2783 от 18 июля 2002 года), в которой, наряду с базовыми и профильными курсами, были выделены курсы по выбору (9 класс) и элективные курсы (10, 11 классы). Их с полным правом можно считать преемниками факультативных курсов. Действительно, и те, и другие, прежде всего, направлены на удовлетворение индивидуальных склонностей, задатков, потребностей учащихся, развитие их способностей.

Согласно ФГОС основного и среднего общего образования (соответственно 2011 и 2012 гг.), остался один термин – курсы по выбору (9-11 классы). Среди них особо выделены предметные курсы, в частности по математике.

Современные цели обучения математике определяют разработку других компонентов структуры методической системы. Прежде всего, для реализации поставленных целей должно быть специальным образом сконструировано содержание обучения. При этом нужны критерии, соответствующие общим целям образования и конкретизирующие механизм отбора содержания по определенному предмету. Представим разработанные критерии отбора содержания учебного материала для предметных курсов по выбору (на примере математических курсов).

I. Критерий целостности содержания. Исследование состояния предметных курсов по выбору показывает, что общий критерий целостности содержания в том виде, как он сформулирован в педагогике, не может быть непосредственно использован для отбора содержания курсов по выбору, так как они не могут охватить всех основных направлений современной науки, производства, общественной жизни, культуры. В данном случае естественным является использование термина целостности в смысле внутренней взаимосвязи содержания, концентрации его вокруг нескольких основных понятий, законов, методов. Это способствует и позволяет сосредоточить усилия учащихся в одном направлении, повышает доступность предлагаемого учебного материала. За небольшой промежуток времени, который отводится на проведение курса по выбору, можно добиться наибольшей эффективности и качества обучения. Этому критерию не удовлетворяет, например, курс по выбору, направленный на решение разнородных задач повышенной трудности. Решение таких задач, хотя и формирует определенные навыки учащихся, не создает целостного объекта изучения, не охватывает всех сторон обучения, воспитания и развития школьников.

II. Критерий преемственности содержания основного курса и курса по выбору. Многочисленные проводимые анкетирования школьников показывают, что они предпочитают предметные курсы по выбору, содержание которых непосредственно связано с основным курсом, основываются на понятиях, известных учащимся из основного курса, как бы углубляют и расширяют его содержание. В этом случае курсы по выбору, как правило, имеют большую эффективность, что связано, прежде всего, с экономией учебного времени, так как ребят не нужно вводить в круг основных понятий и методов темы, знакомить с ее терминологией и обозначениями. Во-вторых, что более существенно, углубленное изучение тем основного курса даёт возможность для обобщения и систематизации обязательных знаний и компетенций, показа их развития и применения к решению более сложных задач математики и других областей.

III. Критерий научной и практической значимости. Этот критерий предполагает, что учебный курс отражает одно из важных направлений развития теории и практики. В школьном преподавании, в частности математики, этот вопрос рассматривается в недостаточной степени. Это не означает, что ученикам недоступно понимание научной и практической значимости изучаемого материала, или что в нем нет такой значимости. Нужно не только сообщать учащимся достоверные факты о свойствах, например в геометрии, реального пространства, но и объяснять их сущность, раскрывать внутренние связи между свойствами действительного и абстрактного пространств.

Конечно, категории – наука и учебный предмет, имеют тесные связи. Наука состоит из приведенных в систему законов внешнего мира и духовной деятельности людей, а также из процессов добывания, накопления и передачи практического использования знаний. Математика, как учебный предмет, должна представлять собой дидактически обоснованную систему отобранных из науки знаний, которые должны быть усвоены школьниками.

Тезис о влиянии практики на развитие математики ни у кого не вызывает возражений. Решение задач практики (в самом широком её понимании) – один из путей, стимулов появления новых исследований в математике. По словам Б.В. Гнеденко [2, с. 43], общение с практикой даёт математике не только широкий набор вопросов, которые внутри самой математики могли бы и не возникнуть. Ещё важнее другое: тесные связи с практикой дают математике возможность сохранять свое значение в качестве орудия исследования для самых разнообразных областей практической деятельности от естествознания до сельского хозяйства и экономики.

Таким образом, для решения вопроса о научной и практической значимости в содержание курса по выбору, желательно, включать следующие вопросы:

1) историю возникновения и постановки той или иной проблемы;

2) поиски решения, трудности на пути решения исследуемой проблемы;

3) сведения об ученых, занимавшихся решением проблемы;

4) значимость решения проблемы для развития науки;

5) применение полученного результата к решению прикладных, народнохозяйственных задач.

Одним из путей реализации критерия научной и практической значимости содержания является раскрытие межпредметных связей изучаемого материала, а также демонстрация прикладных аспектов курса математики. Рассмотрение задач межпредметного и прикладного характера в преподавании математики приводит к естественной взаимосвязи теории и практики, способствует глубокому, неформальному изучению основ наук. Кроме этого, как показывают наши наблюдения и личный опыт проведения геометрических курсов по выбору, такие задачи встречаются учащимися с повышенным интересом, способствуют их активизации, повышают их творческую активность.

IV. Критерий соответствия содержания воспитательным и развивающим целям обучения. Опыт показывает, что не любое содержание способствует достижению целей воспитания и развития обучающихся. Необходимо специальным образом конструировать содержание учебного курса, включая в него элементы истории, современности, занимательности, красоты математики.

Например, включение элементов истории в преподавание математики выполняет следующие важные дидактические функции [5, с. 260].

1. Использование исторического материала позволяет проникнуть в мировоззренческий смысл науки, в процесс формирования ее основных идей, эволюцию методов.

2. Использование исторических сведений является одним из критериев интересности содержания учебного материала, служит для развития познавательных интересов учащихся к математике.

3. Исторические сведения служат для развития творческих способностей учащихся.

4. Элементы истории служат средством нравственного воспитания учащихся: воспитания чувства патриотизма, гордости за достижения отечественных математиков.

Наряду с интересом к вопросам истории, учащиеся, особенно старших классов, живо интересуются современными проблемами в различных областях знания. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, научно-популярная литература, Интернет-ресурсы.

Знакомство с основными направлениями современной науки необходимо теперь каждому выпускнику школы для ориентации в современном мире, правильному представлению о процессах, происходящих в природе и обществе, осознания собственной роли в обществе, в движении вперед.

Для того чтобы познакомить учащихся с современным состоянием развития, например геометрии, вовсе необязательно вводить элементы этой геометрии в основной курс школы. Для этого мы включаем в содержание курса геометрии следующие элементы: а) знакомство с некоторыми направлениями и проблемами современной геометрии; б) знакомство с жизнью и творчеством известных современных учёных-геометров; в) работа с научно-популярной литературой; г) решение современных прикладных задач; д) использование современных компьютерных технологий.

В методической литературе обосновывается принцип занимательности содержания, в частности включение в содержание занимательного материала. Занимательность не в смысле развлечения, рассказов математических анекдотов, а занимательность в смысле показа занимательных элементов в самом содержании математики. К ним можно отнести: неожиданный факт; аналогии; примеры; исторический материал; решение поучительных задач; раскрытие красоты математики.

Такое широкое понимание термина «занимательность» идет еще от Н.И. Лобачевского, который обосновал дидактический принцип «преподавание, приноровленное к возрасту». Учёный считал, что занимательность – необходимое средство возбуждения и поддержания внимания, без которого преподавание не бывает успешным [4, с. 15].

В педагогических исследованиях занимательность указывается как стимул развития познавательных интересов учащихся, как эмоциональная основа для запоминания наиболее трудных вопросов изучаемого материала.

Элементы занимательной математики прочно завоевали сферу внеурочной работы, но, к сожалению, недостаточно используются на основных уроках математики. Главным фактором, обеспечивающим занимательность, должен служить удачно подобранный фактический материал, органично включенный в содержание обучения.

Среди элементов занимательности учебного материала была названа красота математики, которая играет существенную роль в воспитании и развитии у школьников чувства красоты в самом широком значении этого слова. Известный французский математик *Ж. Адамар* вслед за *А. Пуанкаре* тоже считал, что отличительной чертой математического ума является не логичность, а эстетичность [1, с. 106, с. 112]. Он полагал, что чувство эстетического у нас врожденное, но его непрерывно нужно совершенствовать в себе.

Люди, которые способны совершенствовать в себе умение ценить красоту математики, становятся теоретиками-математиками.

Для формирования эстетического чувства красоты математики мы включаем в содержание курса геометрии следующие вопросы: а) необычные, красивые факты, доказательства, решения; б) нестандартные задачи с изящным решением; в) красивые математические объекты, их модели; г) иллюстрации проявления математики в живой природе, живописи, архитектуре, декоративно-прикладном искусстве и т.п.

V. Критерий соответствия содержания возрастным особенностям учащихся. Этот критерий предполагает не только доступность изучаемого материала, соответствие уровня трудности изучаемого материала уровню развития школьников, но и включение в содержание такого материала, который, в силу возрастных особенностей развития школьников, вызывает у них интерес, стимулирует их творческую деятельность.

Например, из анализа возрастных особенностей учащихся старших классов следует, что в содержание обучения по математике нужно включать:

1. Вопросы истории математики, жизни и творчества выдающихся ученых прошлого, исторические задачи и проблемы, решение которых внесло значительный вклад в развитие математики.

2. Философские вопросы математики, связанные с познанием окружающего нас мира, роли и места в этом познании математики.

3. Прикладные аспекты математики, приложение изученных теоретических методов и результатов к решению прикладных задач.

4. Некоторые вопросы современной математики, жизни и творчества современных ученых-математиков.

*VI. Критерий соответствия содержания индивидуальным особенностям школьников***.** Этот критерий рассмотрим на примере геометрического курса по выбору. Из всех учебных предметов, изучаемых в школе, геометрия требует наиболее активной работы по созданию пространственных образов и оперированию с ними. В психологии в исследованиях И.С. Якиманской изучены индивидуальные различия пространственного мышления школьников [10]. Это выражается, во-первых, в том, что индивидуальные различия в пространственном мышлении ярко обнаруживаются в процессе восприятия пространственных свойств и отношений. Здесь выделяется аналитический (т.е. постепенный, с выделением отдельных частей) и синтетический (т.е. целостный, недифференцированный) охват воспринимаемого объекта или его изображения.

Во-вторых, индивидуальные различия ярко проявляются при создании пространственных образов на наглядной основе и оперировании ими. Это сказывается в умении мысленно преобразовывать наглядный материал, а также в овладении способами его понятийной обработки, в избирательной направленности на оперирование отдельными элементами в структуре пространственного образа (его формой, величиной), пространственными отношениями, в легкости оперирования образами разной степени наглядности. Одни учащиеся при предъявлении изображения (с целью создания по нему образа) детально фиксируют все его конкретные особенности, постепенно воссоздают образ из отдельных деталей, объединяя их в единое целое. Другие охватывают в представлении сначала общий контур объекта и лишь затем мысленно наполняют его соответствующими деталями, придающими образу структурную определенность, законченность, четкую конфигурацию. Причем эти особенности проявляются у одного и того же учащегося при работе с различными видами наглядности (чертежом, моделью, рисунком и т.д.), при выполнении разных учебных заданий, что свидетельствует об их устойчивости.

В третьих, индивидуальные различия наблюдаются в способах чувственного обобщения. У одних учащихся обобщение наглядного материала идет через детальный анализ разрозненных данных, у других оно осуществляется свернуто, быстро, причем обобщаются наиболее значимые соотношения наглядных признаков. Эта особенность обобщения рассматривается как важная предпосылка успешного овладения геометрией.

Согласно данным В.А. Крутецкого [3], у школьников с геометрическим складом ума преобладает наглядно-образный компонент над словесно-логическим. Они легко оперируют образным материалом, без затруднения решают задачи на наглядном материале. Хорошо развитые представления дают возможность быстро и безошибочно решать задачи в образной форме. Нередко они пытаются оперировать наглядными образами даже там, где легче опираться на словесно-логические рассуждения.

Выделяются следующие типы математического склада ума: а) аналитический (аналитический или абстрактно-математический склад ума); б) геометрический (геометрический или образно-математический склад ума); в) гармонический (две модификации абстрактного и образного типа склада ума с небольшим преобладанием одного над другим).

Учитель, работая в конкретной группе учащихся и изучив индивидуальные особенности пространственного мышления своих учеников, должен будет включать в содержание, в том или ином объеме, соответствующий наглядный материал, в котором специально нужно выделить следующие элементы: чертежи; рисунки; иллюстрации; стереочертежи; модели геометрических фигур (изготовленные из различного материала и в разной технике); конструирование различных геометрических ситуаций (в том числе с помощью компьютера).

Следующими важными индивидуальными особенностями учащихся, которые обязательно нужно учитывать учителю и отражать в содержании занятий, является неоднородность интереса учащихся к самой математике. Даже у школьников, которые называют математику любимым или одним из любимых предметов, интерес к ней дифференцирован. Во-первых, одни предпочитают алгебру, другие – геометрию, что связано, как показано выше, с соответствующим типом мышления. Во-вторых, у ребят, которым больше нравится изучать геометрию, интерес к ней тоже разный. Анализ неоднократно проведенных соответствующих анкетирований показывает, что одним учащимся больше всего интересно решать геометрические задачи, другим – доказывать теоремы, третьи предпочитают приложения геометрии, а четвертые увлекаются изготовлением моделей красивых геометрических фигур, например, многогранников. Вывод: учителю, опираясь на знание индивидуальных интересов своих учеников, необходимо выбирать соответствующую дозировку различных компонентов учебного материала. С одной стороны, такая работа удовлетворит индивидуальные запросы учащихся в геометрии, а с другой – будет способствовать более успешному и эффективному ее обучению.

Теперь обратим внимание на курсы по выбору для старшеклассников, которые учатся в профильных классах. Выделим некоторые особенности таких классов в целом. Сравним два диаметрально противоположных профиля по отношению к математике: гуманитарный и математический. Математиков, как известно, отличают следующие характерные особенности, которые в полной мере проявляются и у учащихся математических классов. Во-первых, математики не любит, когда им о чем-нибудь рассказывают, они до всего хотят дойти сами.

Из личных наблюдений можно добавить, что, как правило, после занятия учащиеся не хотят уходить и «атакуют» учителя вопросами, а если на занятии не успели решить какую-нибудь задачу, то они обязательно будут пытаться найти её решение. У этих ребят сформирован устойчивый интерес к математике, и они всё время пытаются узнать новое, часто забегая вперёд предложенной программы.

Во-вторых, математики получают удовольствие от полученных знаний и постоянно хотят знать, для чего они, где используются, как дальше преобразуются и развиваются. Им хочется новых открытий.

В третьих, математики умеют наблюдать, выявлять закономерности, что ведет к математическим открытиям. Причём, способность к наблюдению математических закономерностей можно развивать очень рано. Определённое содержание учебного материала может развивать в учениках навык наблюдения за математическими закономерностями. В связи с этим для учащихся математических классов и близким к ним по профилю в содержании необходимо предусмотреть, специально подобрать: нестандартные задачи; исследовательские задачи; задачи на выявление математических закономерностей.

Исходя из анализа наблюдений, достаточно большого количества соответствующих анкетирований и тестирований, а также личного опыта преподавания в гуманитарных и математических классах, мы выделили следующие психолого-педагогические особенности учащихся этих классов, а именно:

1. Преобладание у ребят гуманитарных классов наглядно-образного мышления. В математических классах – абстрактно-логического мышления.

2. Восприятие красоты математики направлено у учащихся гуманитарных классов на её проявления в живой природе, в произведениях искусства, через красивые конкретные математические объекты. В то же время учащиеся математических классов красоту математики видят в изящных, необычных, неожиданных решениях задач, доказательствах теорем.

3. Внимание на уроке у гуманитариев может быть устойчивым в среднем не более 12 минут. У учащихся математических классов этот показатель колеблется от 20 до 25 минут.

4. Среди компонентов содержания обучения у гуманитариев наибольшим интересом пользуются вопросы истории математики, прикладные аспекты, занимательный материал. Математики предпочитают решение нестандартных задач, исследовательских проблем.

5. Из форм работы на уроке гуманитарии выделяют следующие: объяснение учителем нового материала; лабораторные работы; деловые игры; выполнение индивидуальных заданий с привлечением научно-популярной литературы. Математики – решение нестандартных, проблемных, исследовательских задач.

6. Гуманитарии предпочтение отдают активным, коллективным методам работы. Например, при решении задач в классе им нравятся дискуссии, в процессе которых происходит поиск решения задач всем классом. Математики предпочитают самостоятельное решение задач.

7. У школьников гуманитарных классов богаче, чем у учащихся математических классов, воображение, сильнее проявляются эмоции.

8. В гуманитарных классах по составу больше девочек, в математических – мальчиков, фактор, который не нашёл в нашей школе пока должного внимания и учёта. Все курсы рассчитаны на некое бесполое, усреднённое существо.

VII. Критерий соответствия содержания учебно-методическому обеспечению. Этот критерий предполагает, что содержание курса по выбору и в основной школе, и в старших классах определённого профиля должно охватываться учебными пособиями, научно-популярной литературой, наглядными пособиями и техническими средствами обучения в объёме, достаточном для успешного решения поставленных задач обучения.

В учебно-методическое обеспечение содержания предметного курса по выбору включаем следующие важные компоненты: 1) программа; 2) тематическое планирование; 2) учебное пособие; 3) дидактические материалы: математические диктанты, самостоятельные и контрольные работы, тесты, задания для зачётов; 4) учебные материалы для индивидуальной работы с учащимися;

5) банк задач: устных, опорных (базовых, стандартных), повышенной трудности, нестандартных, исследовательских, прикладных, занимательных, исторических; 6) дополнительные учебные материалы для воспитания и развития учащихся (история, внутри- и межпредметные связи, прикладные аспекты, связь с современностью, занимательность, в том числе красота математики); 7) компьютерная поддержка; 8) рекомендуемая литература.

VIII. Критерий соответствия содержания имеющемуся времени. Этот критерий предполагает планирование содержания курса по выбору по занятиям, соответствие объема учебного материала каждого занятия времени, отведенному на него, а также соответствие всего объема содержания курса времени, отведенному на его изучение.

Сказанное реализовано нами в разработке геометрических курсов по выбору, представленных в учебных пособиях [6–9].

Литература:

1. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики / пер. с франц. М.А. Шаталова и О.П. Шаталовой, под ред. И.Б. Погребысского. М.: МЦНМО, 2001.

2. *Гнеденко Б.В.* О математике. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 208 с.

3. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников. М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО МОДЕК, 1998.

4. Математика в образовании и воспитании / сост. В.Б. Филиппов. М.: ФАЗИС, 2000.

5. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии: монография. М.: Прометей, 2004.

6. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Изображение пространственных фигур: элективный курс. 10–11 классы. М.: Мнемозина, 2007.

7. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Кривые: курс по выбору. 9 класс. М.: Мнемозина, 2007.

8. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Многогранники: элективный курс. 10–11 классы. М.: Мнемозина, 2007.

9. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Многоугольники: курс по выбору. 9 класс. М.: Мнемозина, 2007.

10. *Якиманская И.С.* Психологические основы математического образования. М.: Издательский центр «Академия», 2004.

9. РАЗВИТИЕ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Под критическим мышлением будем понимать способ мышления, при котором человек ставит под сомнение любую информацию, и даже собственные убеждения, использует методы познания, которые отличаются контролируемостью, обоснованностью и целенаправленностью [7].

Это согласуется с высказываниями великого французского философа и математика Рене Декарта, который считал, что только принцип *«Сомневайся во всём»* в состоянии помочь нам познать мир.

Сегодня критическое мышление необходимо каждому человеку в связи с огромным потоком информации, распространяемым через средства массовой информации, интернет и т.п.

Задача развития критического мышления учащихся является одной из важных задач обучения, в частности математике. К сожалению, в школе этому вопросу уделяется крайне мало внимания.

В то же время задачи, использующие критическое мышление, предлагаются на основном государственном экзамене (ОГЭ) и на едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике.

Отметим, что в середине прошлого века было издано несколько замечательных книг, посвящённых: ошибкам в математических рассуждениях, например [1, 6]; зрительным иллюзиям [2]; софизмам [3] и др.

Мы предлагаем включать в обучение геометрии задачи из этих книг, а также другие задачи на формирование следующих умений учащихся, которые, на наш взгляд, будут способствовать развитию их критического мышления.

1. Распознавать конфигурации геометрических фигур по их изображениям и описаниям.
2. Избегать ошибок в оценке геометрических величин.
3. Устанавливать некорректность формулировок, истинность и ложность утверждений.
4. Понимать, на какие аксиомы, свойства и теоремы опирается доказательство данного утверждения.

5. Находить ошибки в формулировках и доказательствах.
6. Приводить контрпримеры.

Приведём примеры таких задач, распределённые по классам.

7 класс

1. Не используя линейку, скажите, какие две линии a и b или a и c на рисунке 9.1 изображают одну и ту же прямую. Ответ проверьте с помощью линейки.

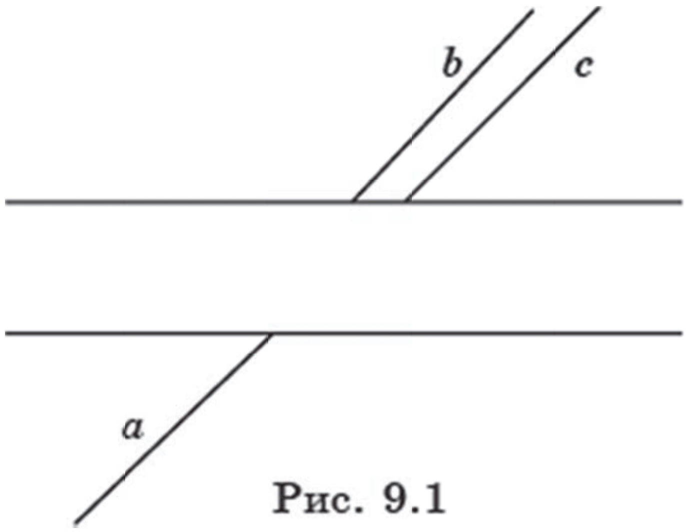

Рис. 9.1

Ответ: линии a и c изображают одну и ту же прямую.

2. Не используя линейку, скажите, являются ли линии a и b, изображённые на рисунке 9.2, прямыми или нет. Ответ проверьте с помощью линейки.

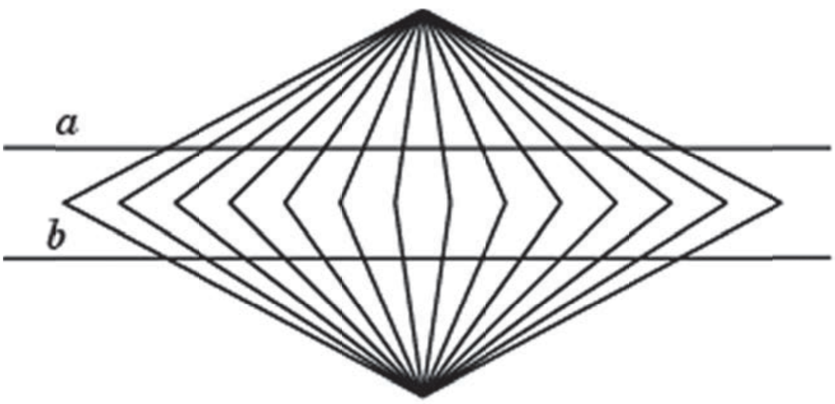

Рис. 9.2

Ответ: линии a и b являются прямыми.

3. Сравните длины отрезков AB и CD, изображённых на рисунке 9.3.

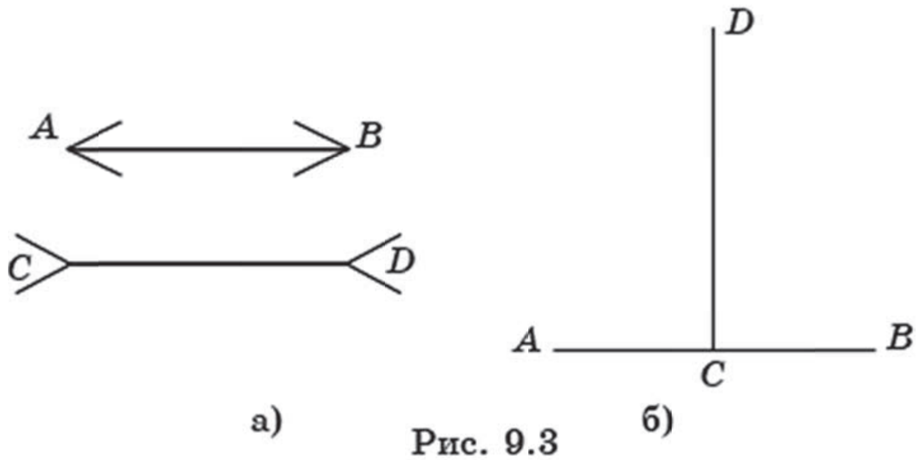

Рис. 9.3

Ответ: а), б) длины отрезков AB и CD равны.

4. Найдите ошибку в доказательстве следующего утверждения.

Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

«Доказательство». Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 9.4).

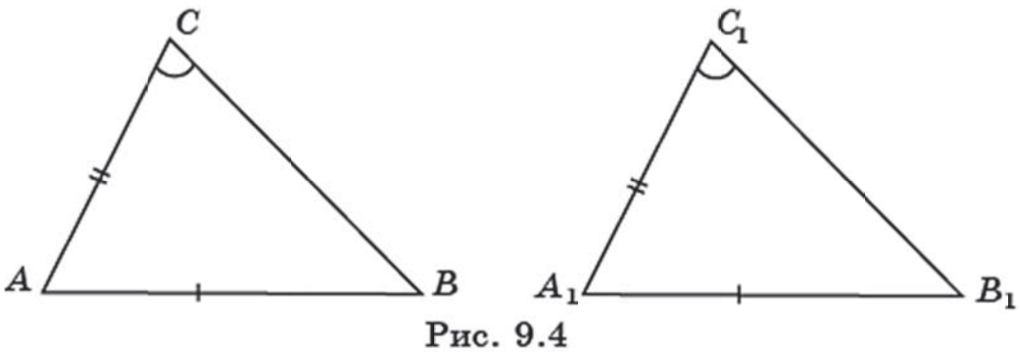

Рис. 9.4

Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 9.5).

Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ равнобедренный, значит, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Из этого и равенства углов C_1 и C_2 следует равенство углов $B_1C_1C_2$ и $B_1C_2C_1$. Значит, треугольник $B_1C_1C_2$ равнобедренный. Следовательно, его стороны B_1C_1 и B_1C_2 равны. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1C_1 = A_1C_2$, $B_1C_1 = B_1C_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

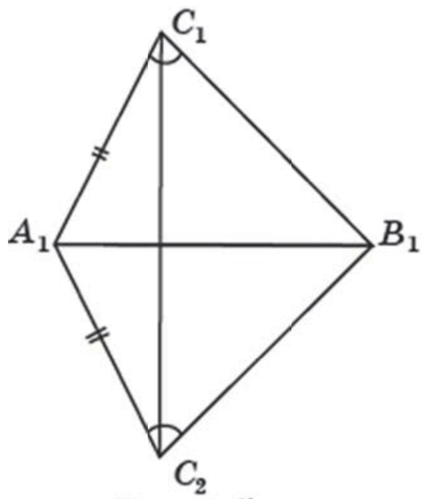

Рис. 9.5

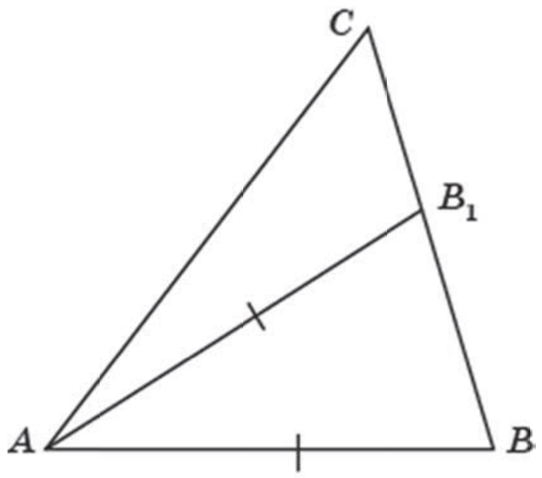

Рис. 9.6

На самом деле, это утверждение неверно. Пример приведён на рисунке 9.6. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них $AB = AB_1$, AC – общая сторона, угол C общий.

5. Верно ли, что если две стороны и высота, проведённая из их общей вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой из их общей вершины другого треугольника, то такие треугольники равны?

Решение. Нет, неверно. Пример приведён на рисунке 9.7. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них AC – общая сторона, $BC = B_1C$, CH – общая высота.

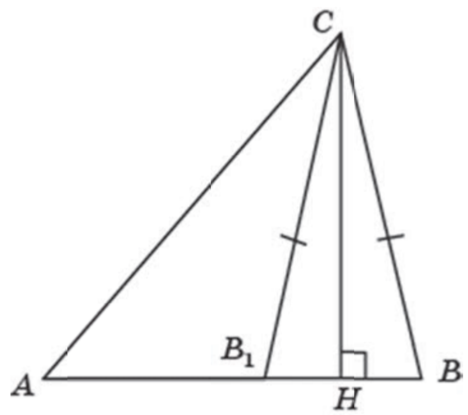

Рис. 9.7

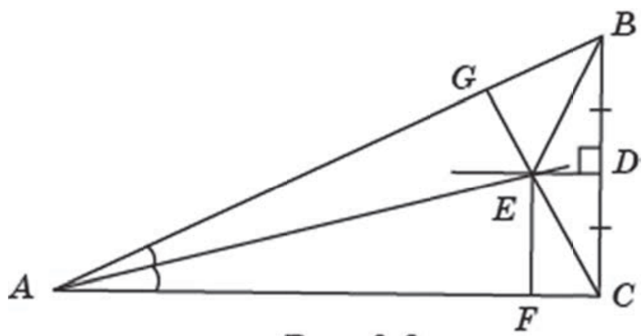

Рис. 9.8

6. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что гипотенуза прямоугольного треугольника равна его катету.

Пусть *ABC* – прямоугольный треугольник (угол *C* – прямой) (рис. 9.8). Докажем, что гипотенуза *AB* равна катету *AC*.

Проведём биссектрису угла *A* и серединный перпендикуляр к стороне *BC*. Обозначим через *E* их точку пересечения. Соединим отрезками точку *E* с вершинами *B* и *C*. Из точки *E* опустим перпендикуляры *EF* и *EG* соответственно на стороны *AC* и *AB* треугольника *ABC*. Так как точка *E* принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку *BC*, то отрезки *BE* и *CE* равны. Так как точка *E* принадлежит биссектрисе угла *A*, то отрезки *EF* и *EG* равны. Прямоугольные треугольники *BEG* и *CEF* равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки *BG* и *CF* равны. Прямоугольные треугольники *AEG* и *AEF* равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки *AG* и *AF* равны. Складывая отрезки *AG* и *BG*, *AF* и *CF*, получаем равенство гипотенузы *AB* и катета *AC*.

Решение. Найти ошибку поможет программа GeoGebra, о которой рассказывалось в работе [4]. В ней можно построить прямоугольный треугольник *ABC*, провести биссектрису угла *A* и серединный перпендикуляр к отрезку *BC*, найти их точку пересечения *E*, опустить из неё перпендикуляры на прямые, содержащие стороны *AC* и *AB* (рис. 9.9).

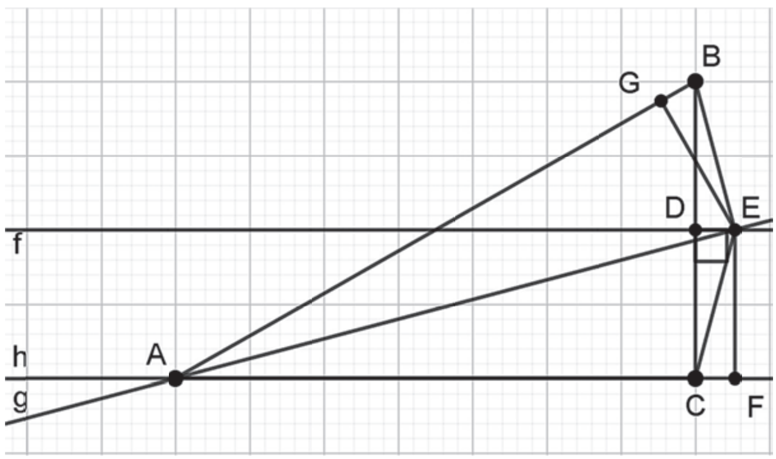

Рис. 9.9

На этом рисунке видно, что точка *E* расположена вне треугольника *ABC*, причём, основание *F* перпендикуляра, опущенного из неё на прямую *AC*, принадлежит продолжению стороны *AC*, а основание *G* перпендикуляра, опущенного на прямую *AB*, принадлежит стороне *AB*.

Так как сторона AB равна сумме отрезков AG и BG, а сторона AC равна разности отрезков AF и FC, то из равенства отрезков $AG = AF$ и $BG = CF$ не следует равенство сторон AB и AC треугольника ABC.

Установим указанное расположение точки E, не опираясь на рисунок. Для этого с центром в точке A и радиусом AB проведём окружность. Обозначим H её точку пересечения с лучом AC. Проведём отрезок BH (рис. 9.10).

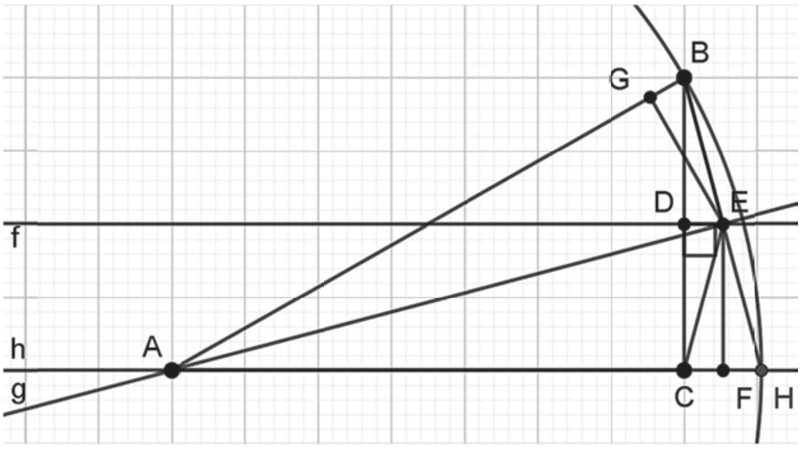

Рис. 9.10

В треугольнике ABH $AB = AH$. Следовательно, биссектриса угла A пересечёт отрезок BH в его середине E, которая расположена вне треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BC содержит среднюю линию треугольника BCH, следовательно, пересекает отрезок BH в точке E. Таким образом, точка E является точкой пересечения биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к отрезку BC. Так как точка E расположена вне треугольника ABC, то основание F перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AC, будет принадлежать продолжению стороны AC, а так как отрезок AE меньше отрезка AB, то основание G перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AB, будет принадлежать стороне AB.

7. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что прямой угол равен тупому углу.

Пусть $ABCD$ – четырёхугольник (рис. 9.11), в котором $AD = BC$, угол D прямой, угол C тупой. Докажем, что углы D и C равны. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD.

Обозначим через G их точку пересечения. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle GDF = \angle GCF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ADG = \angle BCG$. Вычитая из второго равенства углов первое, получаем равенство углов ADC и BCD, т.е. получаем, что прямой угол ADC равен тупому углу BCD.

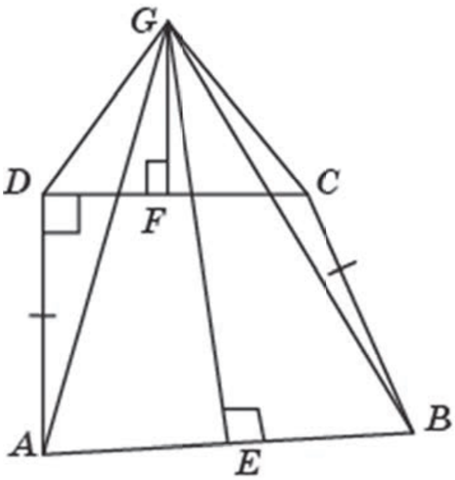

Рис. 9.11

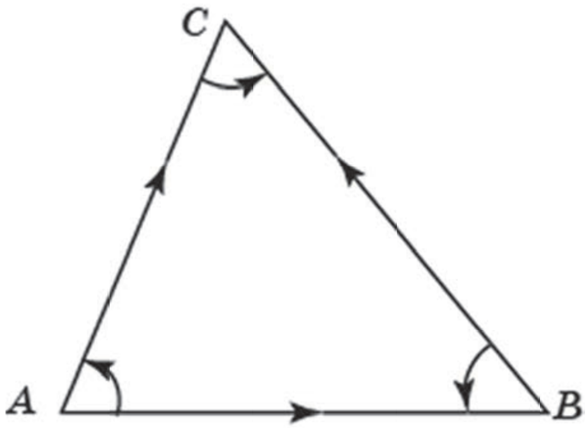

Рис. 9.12

Решение аналогично решению задачи 6.

8. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что сумма углов треугольника равна 180°.

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 9.12). Зададим на прямой AB направление (указано стрелкой). Повернём прямую AB вокруг точки A на угол A. Она перейдёт в прямую AC. Повернём прямую AC вокруг точки C на угол C. Она перейдёт в прямую BC. Повернём прямую BC вокруг точки B на угол B. Она перейдёт в прямую BA с направлением, противоположным начальному направлению прямой AB. Таким образом, прямая AB повернулась на 180°. С другой стороны, этот поворот на 180° складывается из поворотов на углы A, B и C. Следовательно, сумма углов A, B и C треугольника ABC равна 180°.

Решение. Ошибка в этом «доказательстве» связана с тем, что оно не использует аксиому параллельных, а без этого данное утверждение неверно. Например, оно неверно в геометрии Лобачевского.

8 класс

9. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны, то две другие стороны параллельны.

Пусть *ABCD* – четырёхугольник, у которого равны стороны *AD* и *BC* (рис. 9.13).

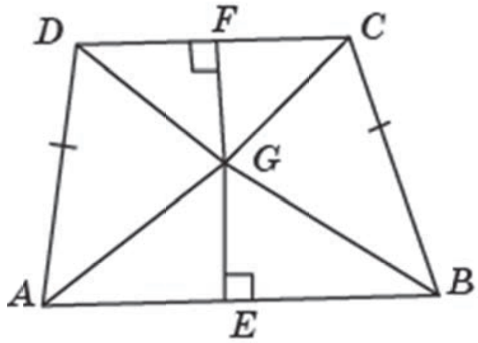

Рис. 9.13

Проведём серединные перпендикуляры к сторонам *AB* и *CD*. Если они параллельны, то стороны *AB* и *CD* параллельны, так как они будут перпендикулярны параллельным прямым. Если эти серединные перпендикулярны не параллельны, то обозначим через *G* их общую точку. Прямоугольные треугольники *AEG* и *BEG* равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$, $\angle AGE = \angle BGE$. Прямоугольные треугольники *DFG* и *CFG* также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle DGF = \angle CGF$. Треугольники *AGD* и *BGC* равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle AGD = \angle BGC$. Так как сумма всех рассмотренных углов равна 360°, то из равенства их пар следует, что сумма углов *AGE*, *AGD* и *DGF* равна 180°. Значит, серединные перпендикуляры совпадают. В этом случае стороны *AB* и *CD* будут перпендикулярны одной прямой, следовательно, параллельны.

Решение аналогично решению задачи 7.

9 класс

10. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна длине его гипотенузе.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* (угол *C* – прямой) (рис. 9.14).

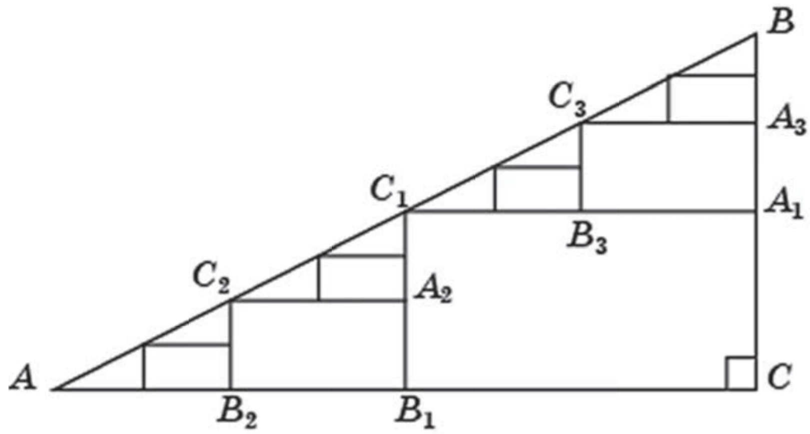

Рис. 9.14

Из середины C_1 гипотенузы AB опустим перпендикуляры C_1A_1 и C_1B_1 соответственно на катеты BC и AC. Длина ломаной $AB_1C_1A_1B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Из середин C_2, C_3 отрезков соответственно AC_1, C_1B опустим перпендикуляры C_2A_2, C_2B_2, C_3A_3, C_3B_3 на соответствующие катеты прямоугольных треугольников AB_1C_1, C_1A_1B. Длина ломаной $AB_2C_2A_2C_1B_3C_3A_3B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Продолжая этот процесс, будем получать ломаные, приближающиеся к гипотенузе. Длины этих ломаных будут стремиться к длине гипотенузы. Так как длины этих ломаных остаются равными сумме длин катетов AC и BC, то длина гипотенуза AB будет равна сумме длин катетов AC и BC.

Этот метод «доказательства», на первый взгляд, аналогичен тому, как определяется длина окружности. Разница состоит в том, что в определении длины окружности берутся правильные многоугольники, вписанные в окружность, т.е. все их вершины принадлежат окружности, а в предложенном «доказательстве» ломаные не являются вписанными в гипотенузу. Именно это и даёт неверный результат.

11. Одна сторона треугольника равна 5. Синус угла, прилежащего к этой стороне, равен 0,6. Высота, проведённая из вершины этого угла, равна 4, Найдите сторону треугольника, противолежащую этому углу.

Трудность в решении этой задачи состоит в том, что для указанных данных возможны два треугольника ABC и ABC_1, изображённые на рисунке 9.15. Для них $AB = 5$, $\sin A = 0{,}6$, высоты AC и AG равны 4.

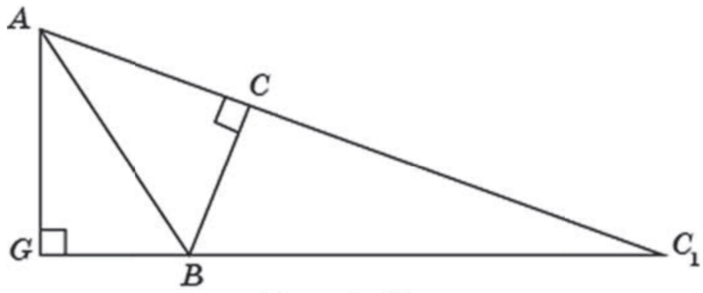

Рис. 9.15

Легко видеть, что для треугольника ABC $BC = 3$. Обозначим через x сторону BC_1 треугольника ABC_1. Из подобия треугольников BCC_1 и AGC_1 получаем равенство $\frac{BC_1}{BC} = \frac{AC_1}{AG}$. Следовательно, имеем уравнение $\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{4}$. Решая его, находим $x = 10\frac{5}{7}$. Значит, $BC_1 = 10\frac{5}{7}$.

Ответ: сторона треугольника равна или 3, или $10\frac{5}{7}$.

12. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что «64 = 65».

Рассмотрим квадрат со стороной, равной 8. разрежем его на части, как показано на рисунке 9.16, а. Сложим из этих частей прямоугольник (рис. 9.16, б). Его площадь равна 65. Следовательно, «64 = 65».

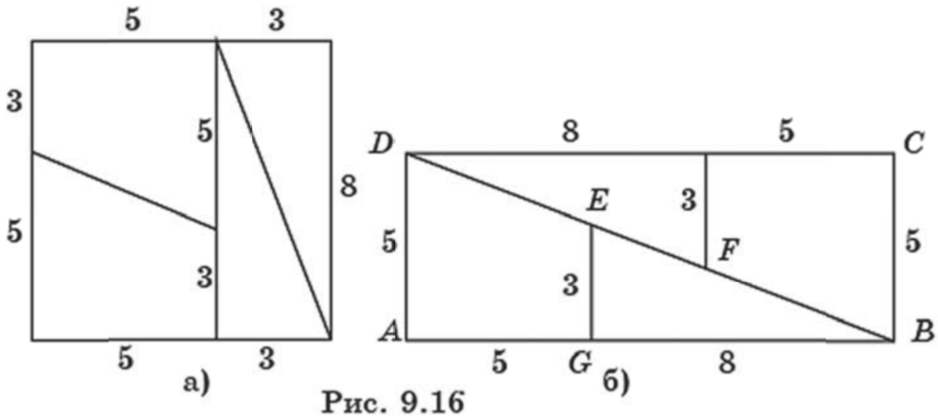

Рис. 9.16

На самом деле, точки D, E, F, B (рис. 12.16, б) не принадлежат одной прямой. Если бы это было так, то треугольники ABD и GBE были бы подобны. Следовательно, выполнялось бы равенство $\frac{AD}{AB} = \frac{GE}{GB}$, которое не выполняется, т.к. $\frac{5}{13} \neq \frac{3}{8}$. Четырёхугольник $DEBF$ является параллелограммом, площадь которого равна 1.

10 класс

13. Как в пространстве расположены прямые DE и FG (рис. 9.17)?

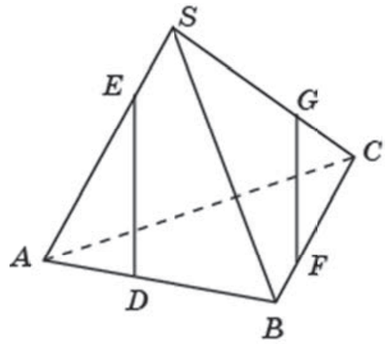

Рис. 9.17

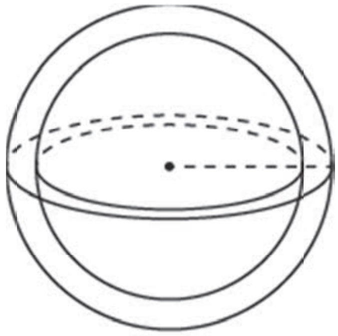

Рис. 9.18

Ответ: скрещиваются.

11 класс

14. Толщина кожуры апельсина составляет одну пятую его радиуса (рис. 9.18). Оцените, какую часть объёма апельсина занимает его кожура.

Решение. Мякоть апельсина имеет форму шара, радиус которого равен $\frac{4}{5}$ радиуса апельсина. Следовательно, объём мякоти составляет $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} \approx 0{,}5$ апельсина. Значит, объём кожуры также составляет половину объёма апельсина.

Литература:

1. *Брадис В.М. и др.* Ошибки в математических рассуждениях. М.: Учпедгиз, 1959.
2. *Литцман В.* Где ошибка? М.: Физматлит, 1962.
3. *Мадера А.Г., Мадера Д.А.* Математические софизмы. М.: Просвещение, 2003.
4. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Геометрические задачи на развитие критического мышления. М.: МЦНМО, 2021.
5. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Как сделать изучение теорем геометрии более эффективным? // Математика в школе. 2017. № 3. С. 34–39.
6. *Уёмов А.И.* Логические ошибки. М.: Госполитиздат, 1958.
7. *Халперн Д.* Психология критического мышления. М.-СПб.: Питер, 2000.

10. ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

В последнее время интерес к задачам с практическим содержанием существенно повысился. Они включаются в содержание ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Рассмотрение на уроках геометрии геометрических задач с практическим содержанием позволяет:

– усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии;

– выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать величины и находить их приближённые значения;

– сформировать представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин;

– повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность обучения геометрии.

Однако результаты ОГЭ и ЕГЭ по математике показывают, что далеко не все учащиеся имеют необходимые геометрические представления и обладают умениями и навыками для решения геометрических задач с практическим содержанием.

В некотором смысле геометрические представления учащихся важнее знания конкретных формул. Формулы забываются, а геометрические представления остаются. Неправильные представления или отсутствие таковых могут приводить к неправильным ответам даже в том случае, когда учащиеся знают формулы.

Мы предлагали учащимся серию задач, в которых требовалось дать ответ, не производя вычислений по формулам, а исходя только из своих интуитивных представлений. Часто ответы оказывались далеки от правильных.

Приведём примеры таких задач.

Задача 1. Мякоть вишни окружает косточку толщиной, равной диаметру косточки. Считая шарообразной формы вишни и косточки, найдите отношение объёма мякоти к объёму косточки.

Ответы учащихся: 2; 4. Правильный ответ: 26.

Задача 2. Апельсин в два раза больше мандарина. Мандарин весит 40 г. Считая их форму шарообразной и удельный вес одинаковым, найдите вес апельсина.

Ответы учащихся: 80 г; 160 г. Правильный ответ: 320 г.

Задача 3. Сколько нужно взять медных шаров радиусом 2 см, чтобы из них можно было выплавить шар радиусом 6 см?

Ответы учащихся: 3; 9. Правильный ответ: 27.

Задача 4. Под каким примерным углом виден диск Луны?

Ответы учащихся: 5°; 10°. Правильный ответ: $0{,}5^{\circ}$.

Задача 5. Эйфелева башня в Париже высотой 300 м весит 8000000 кг. Некто захотел изготовить точную копию этой башни весом 1 кг. Какова будет высота этой модели? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответы учащихся: 10 см; 20 см. Правильный ответ: 150 см.

Действительно, коэффициент подобия равен кубическому корню из 8000000, т.е. равен 200. Высота модели будет равна 300:200=1,5 (м) = 150 (см).

Задача 6. Толщина газетного листа составляет 0,1 мм. Лист сложили пополам, потом ещё раз пополам и т.д. пока не сложили пополам пятьдесят раз. Какова толщина получившейся стопки из газетных листов?

Ответы учащихся: 10 см; 20 см. Правильный ответ: более одного миллиона км.

Действительно, при складывании пополам один раз толщина увеличивается в два раза. При складывании пополам 50 раз толщина увеличивается в 2^{50} раз. Учитывая, что $2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 > 1000^5 =$ $= 1000\,000\,000\,000\,000$, получаем, что толщина стопки будет больше 100 000 000 000 000 мм, или 100 000 000 км.

Вывод, который из этого нужно сделать, состоит в том, что на уроках геометрии следует больше внимания уделять решению геометрических задач с практическим содержанием, формированию представлений учащихся о геометрических величинах и соотношениях между ними. Желательно, чтобы на каждом уроке учащимся предлагались задачи с практическим содержанием. Для этого можно использовать книги А.П. Доморяда [1], Е.И. Игнатьева [2], Б.А. Кордемского [3], Я.И. Перельмана [4], написанные в начале и середине прошлого века.

Большое внимание геометрическим задачам с практическим содержанием уделено в учебнике геометрии [7] и прилагаемых к нему методических рекомендациях для учителя [6] и дидактических материалах [8], в которых задачи с практическим содержанием распределены по отдельным темам.

Приведём некоторые из них.

Задачи на нахождение углов

1. Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

Ответ: 20^{o}.

2. Найдите угол между минутной и часовой стрелками часов в 5 часов.

Ответ: 150^{o}.

3. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за 10 минут?

Ответ: 60^{o}.

4. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за 10 минут?

Ответ: 5^{o}.

5. На сколько градусов повернётся Земля вокруг своей оси за 8 ч?

Ответ: 120^{o}.

6. Расстояние между Москвой и Вашингтоном, измеряемое по большой окружности поверхности Земли, примерно равно 7800 км. Найдите примерную градусную величину соответствующей дуги большой окружности, считая длину всей окружности равной 40000 км. В ответе укажите целое число градусов.

Ответ: 70^{o}.

7. Под каким углом человек видит ноготь своего указательного пальца (ширина ногтя примерно 1 см) на расстоянии вытянутой руки (примерно 60 см)? В ответе укажите целое число градусов.

Ответ: 1^{o}.

8. Под каким углом виден человек ростом 1 м 70 см на расстоянии 100 м от наблюдателя? В ответе укажите целое число градусов.

Ответ: 1^{o}.

9. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Найдите угол подъёма в градусах. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.

Ответ: 2^{o}.

10. Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Расстояние от 11-метровой отметки до линии ворот равно 12 ярдам. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол, под которым видны ворота с 11-метровой отметки. В ответе укажите целое число градусов.

Ответ: 37°.

Задачи на нахождение расстояний

1. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?

Ответ: 50 км.

2. В 12 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 11 м, а другой – 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.

Ответ: 13 м.

3. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. Найдите длину окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение одного часа. (Примите $\pi \approx 3$).

Ответ: 21 м.

4. Два спортсмена должны пробежать один круг по дорожке стадиона, форма которого – прямоугольник с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Один бежит по дорожке, расположенной на 1 м дальше от края, чем другой. Какое расстояние должно быть между ними на старте, чтобы компенсировать разность длин дорожек, по которым они бегут? (Примите $\pi \approx 3$).

Ответ: 6 м.

5. Москва и Новороссийск расположены примерно на одном меридиане под углами 56° и 44° северной широты соответственно. Найдите расстояние между ними по земной поверхности, считая длину большой окружности земного шара равной 40000 км. В ответе укажите целое число километров.

Ответ: 1333 км.

6. Используя данные, приведённые на рисунке 10.1, найдите расстояние *AB* от лодки *A* до берега *b*.

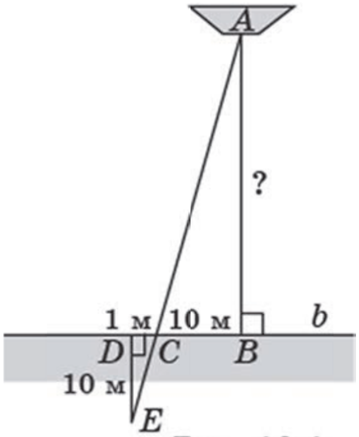

Рис. 10.1

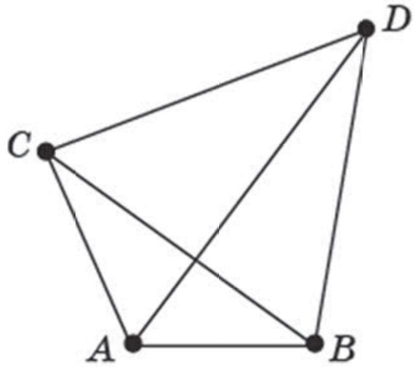

Рис. 10.2

Ответ: 100 м.

7. Расстояние от наблюдателя до башни главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова равно 150 м, а угол, под которым видно здание, равен 58°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту башни. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу метров.

Ответ: 240 м.

8. Высота Останкинской телевизионной башни – 540 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние от неё до человека, который видит башню под углом 32°. В ответе укажите целое число метров.

Ответ: 864 м.

9. Укажите способ нахождения высоты египетской пирамиды (вышки, здания и т.п.) по длине её тени.

10. Укажите способ нахождения расстояния между двумя недоступными объектами *C* и *D* (корабли в море, вершины гор и т.п.), которые видны из двух пунктов *A* и *B* (рис. 10.2), расстояние между которыми можно измерить.

Помимо практических задач на нахождение углов, длин, площадей и объёмов в учебнике [7] представлены:

– экстремальные задачи с практическим содержанием;

– задачи на разрезание;

– задачи на нахождение траекторий движения точек (циклоидальные кривые);

– задачи, связанные с уникурсальными графами, задача Эйлера о трёх домиках и трёх колодцах, задачи на раскрашивание карт.

Обычно экстремальные задачи, или задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, решаются в курсе алгебры и начал математического анализа старших классов с помощью производной.

Вместе с тем имеется важный класс геометрических экстремальных задач, которые решаются своими методами без помощи производной.

Эти задачи, с одной стороны, имеют большое значение, как для математики, так и для её приложений, а с другой стороны, развивают геометрические представления учащихся, формируют необходимые умения и навыки решения экстремальных задач, могут служить пропедевтикой изучения соответствующих разделов курса алгебры и начал математического анализа.

Приведём примеры экстремальных задач с практическим содержанием.

Задача 1. Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону (рис. 10.3). Найдите такую точку C на прямой c, для которой сумма расстояний $AC + CB$ – наименьшая.

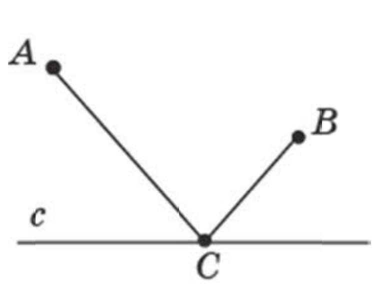

Рис. 10.3

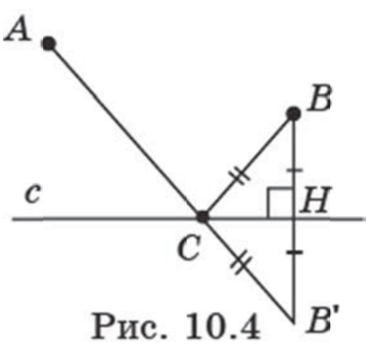

Рис. 10.4

Одна из возможных практических интерпретаций этой задачи состоит в следующем.

На одном берегу реки расположены два населённых пункта. В каком месте на берегу следует построить пристань и проложить от неё дороги к населённым пунктам, чтобы суммарная длина дорог была наименьшей?

Решение. Из точки B опустим на прямую c перпендикуляр BH и отложим отрезок HB', равный BH (рис. 10.4).

Прямая c будет серединным перпендикуляром к отрезку BB' и, следовательно, для произвольной точки C на прямой c будет выполняться равенство $CB = CB'$. Поэтому сумма $AC + CB$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC + CB'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки *A*, *B'*, *C* принадлежат одной прямой, т.е. искомая точка *C* является точкой пересечения отрезка *AB'* с прямой *c*.

Задача 2. Для данного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая.

Одна из возможных практических интерпретаций этой задачи состоит в следующем.

Три соседа по дачным домикам решили вырыть общий колодец и проложить к нему дорожки от своих домиков. Укажите расположение колодца, при котором суммарная длина дорожек наименьшая.

Прежде чем непосредственно перейти к решению этой задачи, рассмотрим одну из замечательных точек треугольника – точку Торричелли.

Точкой Торричелли треугольника *ABC* называется такая точка *O*, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120° (рис. 10.5), т.е. углы *AOB, AOC* и *BOC* равны 120°.

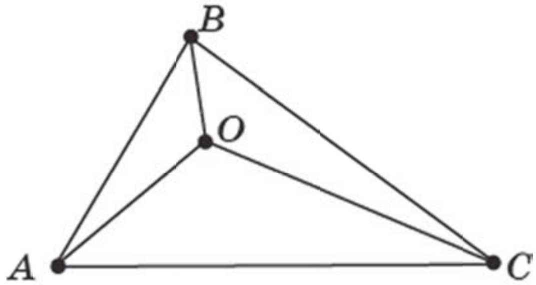

Рис. 10.5

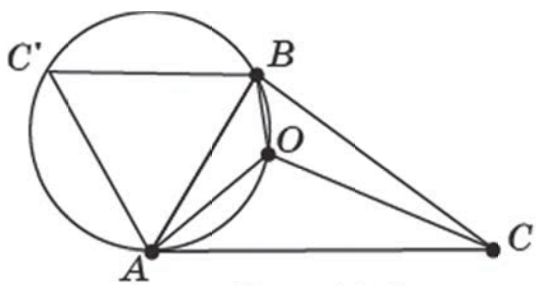

Рис. 10.6

Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше 120°, то точка Торричелли существует.

Выясним, что является геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под углом 120°. К этому времени учащиеся должны знать, что геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, является дуга окружности.

Для построения соответствующей дуги окружности на стороне *AB* треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник *ABC’* (рис. 10.6) и опишем около него окружность.

Отрезок *AB* стягивает дугу этой окружности величиной 120°. Следовательно, точки этой дуги, отличные от *A* и *B*, обладают тем свойством, что отрезок *AB* виден из них под углом 120°.

Аналогичным образом на стороне *BC* треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник *BCA’* (рис. 10.7) и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные от B и C, обладают тем свойством, что отрезок BC виден из них под углом 120°.

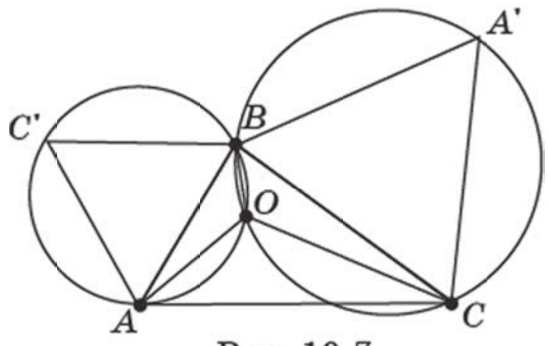

Рис. 10.7

В случае, если углы треугольника меньше 120°, то эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке O треугольника ABC. В этом случае $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$. Следовательно, $\angle AOC = 120^\circ$. Поэтому точка O является искомой.

В случае, если угол B равен 120°, то точкой пересечения дуг окружностей будет точка B. В этом случае точка Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны AB и BC.

В случае, если угол B больше 120°, то соответствующие дуги окружностей не пересекаются. В этом случае точка Торричелли также не существует.

Докажем теперь, что в случае, если углы треугольника меньше 120°, искомой точкой, сумма расстояний от которой до вершин треугольника, является точка Торричелли.

Повернём треугольник ABC вокруг вершины C на угол 60° (рис. 10.8).

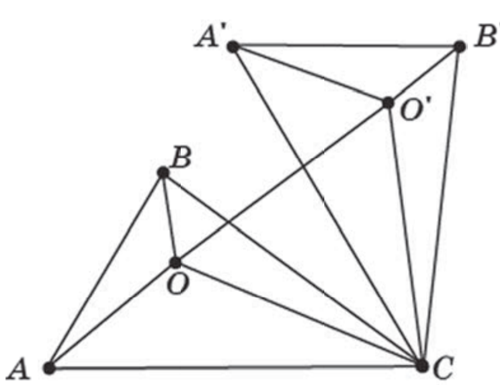

Рис. 10.8

Получим треугольник $A'B'C$. Возьмём произвольную точку O в треугольнике ABC . При повороте она перейдет в какую-то точку O'. Треугольник $OO'C$ – равносторонний, так как $CO = CO'$ и $\angle OCO' = 60^\circ$, следовательно, $OC = OO'$. Поэтому сумма длин $OA + OB + OC$ будет равна длине ломаной $AO + OO' + O'B'$. Ясно, что наименьшее значение длина этой ломаной принимает в случае, если точки A, O, O', B' принадлежат одной прямой.

Если O – точка Торричелли, то это так. Действительно, $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle COO' = 60^\circ$. Следовательно, точки A, O, O' лежат на одной прямой. Аналогично, $\angle CO'O = 60^\circ$, $\angle CO'B' = 120^\circ$. Следовательно, точки O, O', B' принадлежат одной прямой. Значит, точки A, O, O', B' принадлежат одной прямой.

В качестве самостоятельной исследовательской работы учащимся можно предложить доказать, что в случае, если один из углов треугольника больше или равен 120°, то решением задачи является вершина этого угла.

Задача 3. Населённые пункты A и D расположены на противоположных берегах реки (рис. 10.9). В каком месте реки следует построить мост BC и проложить дороги AB и CD, чтобы путь $AB + BC + CD$ имел наименьшую длину? (Берега b, c реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам.)

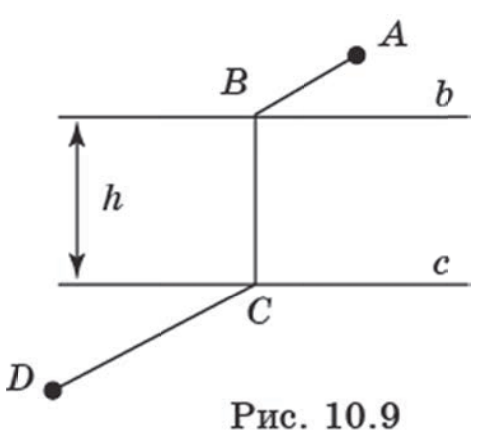

Рис. 10.9

Решение. Построим отрезок AA', перпендикулярный b и равный h, где h – ширина реки (рис. 10.10). Если BC – искомый мост, то четырёхугольник $AA'CB$ – параллелограмм, следовательно, $AB + BC + CD = AA' + A'C + CD$. Путь $AA' + A'C + CD$ имеет наименьшую длину, если $A'C + CD$ имеет наименьшую длину.

Это произойдёт в случае, если *A'*, *C* и *D* принадлежат одной прямой. Таким образом, для нахождения моста *BC* нужно: построить отрезок *AA'*, перпендикулярный *b* и равный *h*; провести прямую *A'D* и найти её точку пересечения *C* с прямой *c*; провести *BC* перпендикулярно *c*.

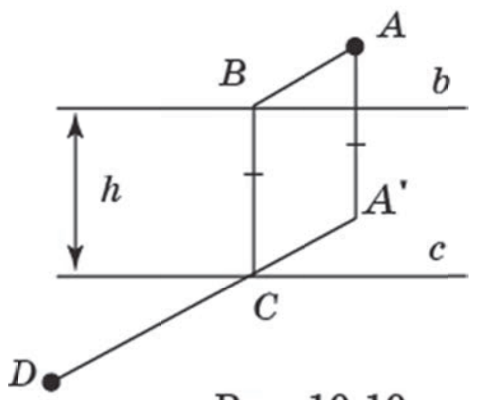

Рис. 10.10

Для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ по математике в части геометрических задач с практическим содержанием можно использовать книгу [5].

Литература:

1. *Доморяд А.П.* Математические игры и развлечения. М.: Физико-математическая литература, 1961.

2. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. М.: Наука, 1982.

3. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. – 9-е изд. М.: Наука, 1991.

4. *Перельман Я.И.* Занимательная геометрия. Д.: ВАП, 1994.

5. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрические задачи с практическим содержанием. – 2-е изд. М.: МЦНМО, 2015.

6. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия. 7 (8, 9) класс: методические рекомендации для учителя. М.: Мнемозина, 2007 (2010, 2011).

7. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия 7–9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2014.

8. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Дидактические материалы по геометрии. 7 (8, 9) класс. М.: Мнемозина, 2005 (2007, 2007).

11. ОРГАНИЗАЦИЯ МЕТАПРЕДМЕТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

В действующих федеральных государственных стандартах начального общего образования, основного общего образования и среднего общего образования установлены требования к результатам освоения соответствующих программ. Наряду с личностными и предметными, выделены метапредметные требования [5, с. 7]. К ним, помимо межпредметных понятий, универсальных учебных действий (три из четырёх, это регулятивные, познавательные, коммуникативные, без личностных), отнесены также самостоятельность обучающихся в организации своей учебной деятельности, учебного сотрудничества не только с педагогами, но и своими сверстниками, построение индивидуального образовательного маршрута.

В настоящее время, довольно, часто, стало даже модным, современным использовать известный афоризм:

«Скажи мне, и я забуду.
Покажи мне, и я запомню.
Дай мне действовать самому,
и я научусь»

(Конфуций)

Заметим, что без предварительных «Скажи» и «Покажи» вряд ли состоится какой-то качественный результат деятельности.

Начнём с практического примера. Рассмотрим многогранник, который называется «*ромбододекаэдр*» (рис. 11.1).

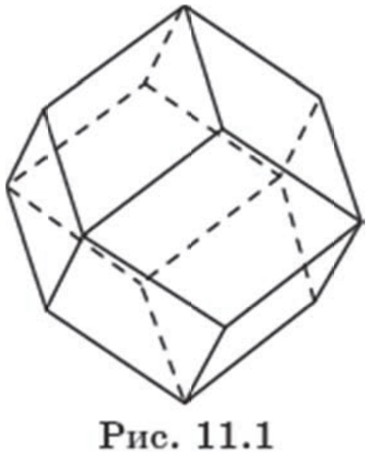

Рис. 11.1

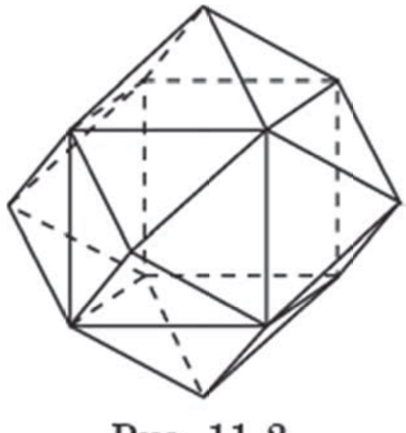

Рис. 11.2

Это двенадцатигранник, у которого все грани – равные ромбы. Его очень легко представить. Возьмём два равных куба и один из них разобьём на шесть равных пирамид. Их основаниями являются грани куба, а вершина общая, это – центр куба. Приложим эти пирамиды к граням другого куба таким образом, чтобы основания пирамид совместились с соответствующими гранями куба. Получится ромбододекаэдр (рис. 11.2).

Задача. Можно ли равными ромбододекаэдрами заполнить всё пространство?

Другими словами, в задаче говорится о построении пространственного паркета из ромбододекаэдра. Ответ положительный: «Да, можно».

Проведём такой мысленный эксперимент. Заполним пространство равными кубами. Затем отметим их в шахматном порядке. Например, мысленно окрасим в чёрный и белый цвета. К граням каждого, например, чёрного куба прилегают шесть белых кубов. Каждый из этих белых кубов разобьём на шесть равных пирамид (как мы это сделали выше при представлении ромбододекаэдра), и присоединим эти пирамиды к прилегающим к ним отмеченным кубам. При этом каждый отмеченный куб достроится до ромбододекаэдра.

Для тех, кто хочет ещё с этим «повозиться», подумайте и нарисуйте многогранник, вершинами которого являются центры симметрий граней ромбододекаэдра, т.е. точки пересечения их диагоналей. Как он называется? Сколько у него вершин, рёбер и граней, каких граней?»

***Вопрос*:** «Можно ли рассмотрение такой проблемной ситуации, решение такой задачи охарактеризовать, как организацию метапредметной деятельности?»

Родовое понятие здесь «деятельность», кратко структуру, которой можно представить следующим образом:

Потребность $\rightarrow$ Мотив $\rightarrow$ Цель$\rightarrow$ Действия $\rightarrow$ Результат.

Классическая теория деятельности, деятельностного подхода широко представлена в трудах наших великих предшественников, таких как Л.С. Выготский, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн, А.А. Столяр, Л.М. Фридман и многих, многих других.

Напомним, что в учебно-методической литературе выделяются следующие основные видовые понятия деятельности: познавательная деятельность (*ПД*); учебная деятельность (*УД*); учебно-познавательная деятельность (*УПД*).

Условно их взаимосвязь можно представить так: *УПД*$\subset$ *УД*$\subset$ *ПД*.

Знак «$\subset$ » означает «включает», «содержит». Таким образом, самым общим, или «широким», понятием в данном случае является познавательная деятельность, а самым «узким» – учебно-познавательная деятельность.

***Вопрос*:** «В какое же место этой схемы следует определить, вписать метапредметную деятельность?».

Как известно, «мета» означает «за», «через», «над». Как правило, когда говорят об этом, ссылаются на историков, которые назвали первым метапредметом «Метафизику» Аристотеля (IV век до нашей эры). Это название буквально означает то, что «после физики». Заметим, что сам учёный назвал своё сочинение «Первая философия», и в нём изложил учение об основных принципах бытия, а позже этот труд и был назван «Метафизика» [6, с. 7].

За прошедшее время появились различные термины с приставкой «мета». Назовём некоторые из них, как сейчас принято говорить, ключевые слова, связанные с обозначенной темой: метапредметная деятельность; метапредмет; метапредметное занятие; метасодержание; метазнания; метапонятия; метатема; метаметоды; метанавыки; метакомпетенции; метапредметные требования и т.п.

В данном случае особый интерес представляют метапредметные требования к результатам освоения образовательных программ, которые, как было отмечено выше, прописаны в соответствующих федеральных государственных образовательных стандартах начального общего образования, основного общего образования и среднего общего образования.

Ясно, конечно, что метапредметная деятельность не должна сводиться только к формированию универсальных учебных действий (УУД). Важно, что вместе с «мета», есть и слово «предметная», т.е. в организации такой деятельности нужно исходить из конкретного предмета, опираться на него.

Таким образом, в учебно-познавательной деятельности, где особо выделяется *математическая деятельность*, в неё, в качестве составной части, встраивается *метаматематическая деятельность*.

Чтобы дойти до сути в любом методическом вопросе, мы для себя выделяем соответствующие ***критерии***, которыми нужно руководствоваться. Это, так сказать, пункт отправления. Например, в работе [1] выделены критерии отбора содержания для предметных (математических) курсов по выбору. В силу своих специфических особенностей, на занятиях таких курсов создаются благоприятные условия для организации метапредметной деятельности обучающихся.

Интересно, заметить, что, по долгу службы, мы часто общаемся с психологами и очень много полезного почерпнули из бесед с ними. В частности, при разработке некоторых практических, конкретных критериев, принципов, частей, параметров, компонентов, рекомендаций и так дальше, нам советовали не увлекаться их количеством. Оптимально выделить 3-4 такие единицы, которыми, действительно, можно руководствоваться. Следуя этому совету, выделим три следующих критерия.

I. *Критерий реализации принципа преемственности обучения*. Это, довольно, значимый критерий. Ведь нам есть, чем гордиться. Отечественной школой накоплен уникальный опыт, в том числе, по внеклассной работе, или, как её сейчас принято называть, внеурочной деятельности по математике. Сколько же там собрано, переходя на современный язык, метасодержания и метаформ обучения математике. При этом заметим, что следует иметь в виду не просто содержание повышенной трудности математического материала, а содержание, имеющее принципиальное значение для понимания роли и места математики в окружающем нас мире, что, по праву, является метапредметным аспектом обучения математике.

Например, историки математики называют первой логической задачей задачу про «Волка, козу и капусту». Это старинная задача, которая встречается в сочинениях, начиная с VIII века. Заключается она в следующем.

Задача. Некий человек хочет перевезти в лодке на другой берег волка, козу и капусту. В лодке может поместиться только человек и с ним или волк, или коза, или капуста. Известно, что в присутствии человека эти «друзья» не едят друг друга, а без него волк съест козу, а коза – капусту. При этом человек справился с поставленной проблемой. Как он это сделал?

С точки зрения метапредметности, эту задачу можно охарактеризовать как метапредметную, т.к. при её решении «работают» общие приёмы математической деятельности.

Назову несколько фамилий выдающихся популяризаторов математической науки, которые должны звучать, должны оставаться с нами. Это: В.Г. Болтянский, М. Гарднер, Е.И. Ингатьев, Б.А. Кордемский, Я.И. Перельман, Г. Штейнгауз, О.Д. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом и многие, многие другие.

II. *Критерий соответствия личности обучающихся.* Сюда отнесём, во-первых, *индивидуальные особенности учащихся*. В психологии есть даже специальный раздел, который называется «Дифференциальная психология». В нём накоплен значительный материал, в том числе экспериментальный и описательный, о вариативности, как отдельных психических свойств человека (восприятия, внимания, воображения, памяти, мышления), так и сложных комплексных образованиях (характере, темпераменте, интересах, склонностях, мотивации и т.д.).

Во-вторых, это соответствие *возрастным особенностям* школьников. Поскольку в данном случае речь идёт о старшей ступени общего образования, то из анализа возрастных особенностей учащихся старших классов следует, что в содержание обучения по математике, в частности по геометрии, нужно включать такие метааспекты [1, с. 10].

1. Вопросы истории математики, жизни и творчества выдающихся учёных прошлого, исторические задачи и проблемы, решение которых внесло значительный вклад в развитие математики.

2. Философские вопросы математики, связанные с познанием окружающего нас мира, роли и места в этом познании математики.

3. Прикладные аспекты математики, приложение изученных теоретических методов и результатов к решению именно прикладных задач.

4. Некоторые вопросы современной математики, жизни и творчества современных учёных-математиков.

Следующей важной частью личностного критерия является *интерес учащихся к самой математике*.

Здесь очень важно отметить *неоднородность* этого интереса. Даже у школьников, которые называют математику любимым или одним из любимых предметов, интерес к ней весьма дифференцирован. Одни предпочитают алгебру, другие – геометрию, что связано, как мы знаем, с соответствующим типом мышления. У ребят, которым больше нравится изучать геометрию, интерес к ней тоже разный. Анализ неоднократно проведённых соответствующих анкетирований показывает, что одним учащимся больше всего интересно решать геометрические задачи, другим – доказывать теоремы, третьи предпочитают приложения геометрии, а четвёртые увлекаются изготовлением моделей красивых геометрических фигур, например многогранников.

Вывод. Учителю, при организации метапредметных занятий, конечно, нужно, опираясь на знание индивидуальных интересов своих учеников, выбирать соответствующую дозировку различных компонентов учебного материала.

III. *Критерий открытости методической работы педагога.* Этот критерий имеет важное значение с точки зрения организации таких метазанятий. Назовём основные *принципы* такой работы.

1. Направленность обучения на формирование для каждого школьника своего собственного индивидуального образовательного маршрута.

2. Вариативность обучения, т.е. предоставление каждому ученику возможность выбора учебного материала в соответствии со своими индивидуальными, возможностями, интересами, предпочтительными формами и методами работы. Для старших школьников можно предоставить большую самостоятельность в выборе как раз метапредметного материала, дополнительно осваиваемого в соответствии со своими запросами.

3. Валидность обучения, означающая достаточно высокую значимость метаматематического материала для достижения результатов обучения, решения задач образования, воспитания и развития.

4. Успешность обучения, понимаемая нами в том, что у каждого ученика должен быть свой, пусть маленький, но собственный успех в обучении. Успех рождает вдохновение, уверенность в своих силах. Задача учителя – помочь каждому своему ученику достичь такого своего успеха.

Открытость методической работы педагога означает, что речь идёт не только о понимании учениками целей обучения, но и о том, чтобы школьники представляли себе, почему, например, они рассматривают некоторую теорию или решают определённую задачу, или чем хорошо предложенное индивидуальное задание и т.д. Ученикам должно нравиться построение занятий, их основные этапы, техника проведения каждого из них.

На метапредметных занятиях учащиеся могут стать непосредственными участниками методической работы педагога, который подробно объясняет им цели своих методических действий, поступков, приёмов. То, что вызывает неодобрение, неприятие класса, должно уйти из учебного процесса. На таких занятиях ненавязчиво складывается благоприятная обстановка для настоящего сотрудничества между всеми участниками образовательного процесса.

Приведём пример из практики работы И.М. Смирновой в школе. «Несколько лет назад в своём старшем гуманитарном классе, я объявила ребятам, что мы вместе будем писать учебник по стереометрии, что без их помощи (что соответствует действительности) хорошей книги не получится. Ребята активно включились в эту деятельность, ведь им предложили серьёзное, взрослое, нужное дело. Не жалею времени на объяснение своих действий, это способствует подключению всего класса к активной учебной деятельности и не жалею времени на то, чтобы помочь каждому ученику раскрыть себя. В том же классе (гуманитарном, историко-философском) три девочки не могли добиться значительных успехов на основных уроках. Но оказалось, что одна из них прекрасно делает модели многогранников, причём, ей удавались сложные – модели полуправильных и правильных звёздчатых многогранников (из развёрток и геометрического конструктора), другая любит решать дополнительные занимательные задачи, а третья имеет прекрасную домашнюю библиотеку и с удовольствием представляет классу замечательные книги по математике. При таких достижениях невозможно назвать этих учениц «слабыми», как это часто бывает в школе. Если школьник, действительно, почувствует к себе такое отношение, он будет потерян для обучения математике, и в результате пострадает и основное, базовое, геометрическое образование в целом. В нашем классе тоже была ученица, которая в начале 10-го класса даже не пыталась ничего понять, твёрдо уверовав в свою полную неспособность к геометрии. Однако постепенно мы смогли переломить эту ситуацию, и произошло это на дополнительных, как теперь назовём метапредметных, занятиях. Она смогла проявить себя в коммуникативной деятельности, оказавшись непревзойдённой рассказчицей интересных исторических математических экскурсов».

Это всё очень важно, т.к., как подчёркнуто в работе [4, с. 99] развитие личностных качеств обучающихся способствуют формированию у них творческих способностей. Проблема, которая является одной из приоритетных на современном этапе развития школьного образования.

Теперь вернёмся к задаче о заполнении пространства равными ромбодододекаэдрами, представленной выше. Приведём соответствующее метапредметное содержание.

Во-первых, обращает на себя внимание тот факт, что форму этого многогранника придумал не сам человек, а создала природа в виде кристалла *граната*. Неслучайно этот многогранник даже получил название «*гранатоэдр*». Конечно, в связи с этим для старшеклассников, с одной стороны, занимательны истории драгоценных камней, легенды, связанные с ними, а с другой стороны, интересны и научные факты, которые изучаются, исследуются в специальной науке – кристаллографии. Почему, например, так привлекательны и красивы кристаллы? Их физические и химические свойства определяются их геометрическим строением. Заметим, что всегда очень успешно проходит метапредметное занятие «Кристаллы – природные многогранники».

В связи со сказанным, особо отметим, что значительный вклад в изучении форм кристаллов внесли работы выдающегося отечественного геометра и кристаллографа Е.С. Фёдорова. В 1890 году он строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических решётках, т.е. симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Он показал, что таких законов 230. Впоследствии, в честь учёного, они были названы фёдоровскими пространственными группами симметрии.

В метапредметной деятельности очень важным этапом является развитие интуиции обучающихся, опирающейся на их наглядные представления. Поясним сказанное на примере. Представляя учащимся кристалл граната, предлагаем им задачи, решаемые из наглядных соображений.

Для начала можно предложить учащимся просто нарисовать ромбододекаэдр. Увлекательно! А потом рассмотреть такие задачи.

1. Подсчитайте число вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) ромбододекаэдра.

2. Имеются ли у ромбододекаэдра пары параллельных граней? Если да, сколько таких пар?

3. Сколько трёхгранных и четырёхгранных углов? Имеются ли другие многогранные углы?

4. Попытайтесь определить величину двугранных углов ромбододекаэдра.

5. Определите величину углов между несмежными гранями четырёхгранных углов ромбододекаэдра.

(Ответы: 1. В=14, Р=24, Г=12. 2. Да; 6. 3. Соответственно 8 и 6; нет. 4. 120^o. 5. 90^o).

Говоря об элементах симметрии кристалла граната, школьникам можно предложить следующие задачи, которые решаются, как и предыдущие, исходя из наглядных соображений.

1) Имеется ли у кристалла граната центр симметрии?

2) Имеются ли у кристалла граната оси симметрии? Если да, покажите их на модели ромбододекаэдра.

3) Сколько осей симметрии каждого типа?

4) Имеются ли у кристалла граната плоскости симметрии? Если да, сколько их?

(Ответы: 1), 2) Да. 3) 3 оси, проходящие через противолежащие вершины четырёхгранных углов; 4 оси, проходящие через противолежащие вершины трёхгранных углов; 6 осей, проходящих через центры симметрии противолежащих граней ромбододекаэдра. 4) Да; 9).

Подчеркнём ещё раз, что представленные задачи решаются учащимися, исходя из наглядных соображений, а не строгих математических доказательств. Поэтому ответы являются, скорее предположениями о наличии или отсутствии тех или иных свойств данного многогранника. Вместе с тем, ценность этих упражнений заключается в том, что учащиеся знакомятся с формой и свойствами ромбододекаэдра на наглядной основе, тем самым ненавязчиво развивается их геометрическая интуиция.

Конечно, затем будут предложены и серьёзные задачи. Например.

1. Постройте ромбодододекаэдр с помощью куба.

2. Найдите углы граней ромбододекаэдра.

3. Найдите длину ребра ромбододекаэдра, построенного из единичного куба.

4. Найдите площадь поверхности ромбододекаэдра, построенного из единичного куба.

5. Найдите объём ромбододекаэдра, построенного из единичного куба.

(Ответы: 2. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\alpha \approx 71°$, где α – искомый угол. 3. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 5. $\frac{1}{4}$.).

Практический опыт работы в школе показывает, что такие метапредметные занятия, в нашем случае по геометрии, организованная на них метапредметная деятельность учащихся способствует активизации всего процесса обучения геометрии в целом.

Литература:

1. *Смирнова И.М.* Критерии отбора содержания математических курсов по выбору // Наука и школа. 2014. № 3. С. 7–13.

2. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии. М: Прометей, 2004. С. 151–160.

3. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Многогранники: элективный курс. 10–11 классы: учебное пособие для общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2007.

4. *Стулова Г.П.* О формировании творческих способностей учащихся // Наука и школа. 2015. № 4. С. 95–99.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / Министерство образования и науки Российской Федерации. М.: Просвещение, 2011. С. 7–10.

6. *Хуторской А.В.* Метапредметный подход в обучении: научно-методическое пособие. М.: Издательство «Эйдос»; Издательство Института образования человека, 2012.

12. ПРОЕКТНОЕ ОБУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования говорится, что индивидуальный проект представляет собой особую форму организации деятельности обучающихся (учебное исследование или учебный проект).

Индивидуальный проект выполняется обучающимся самостоятельно под руководством учителя по выбранной теме в рамках одного или нескольких изучаемых учебных предметов, курсов в любой избранной области деятельности (познавательной, практической, учебно-исследовательской, социальной, художественно-творческой, иной).

Результаты выполнения индивидуального проекта должны отражать:

– сформированность навыков коммуникативной, учебно-исследовательской деятельности, критического мышления;

– способность к инновационной, аналитической, творческой, интеллектуальной деятельности;

– сформированность навыков проектной деятельности, а также самостоятельного применения приобретённых знаний и способов действий при решении различных задач, используя знания одного или нескольких учебных предметов или предметных областей;

– способность постановки цели и формулирования гипотезы исследования, планирования работы, отбора и интерпретации необходимой информации, структурирования аргументации результатов исследования на основе собранных данных, презентации результатов.

Мы считаем, что индивидуальный проект может занимать по времени не только один или два года, как это указано в ФГОС, но и 3–4 недели, а выполнять проект может и один учащийся или команда из нескольких человек. В этом случае за один год учащиеся могут выполнить несколько проектов, относящихся к разным вопросам математики и её приложений. Если же система проектов, выполняемых учащимися, покрывает основное содержание обучения, то в этом случае можно говорить об обучении через проекты, или проектном обучении.

При этом индивидуальные проекты должны отвечать следующим требованиям.

I. Тема проекта должна быть интересна для учащихся, создавать мотивацию для её исследования.

II. Проект должен соответствовать целям и задачам обучения, учитывать индивидуальные и возрастные особенности учащихся, опираться на пройденный учебный материал.

III. Содержание проекта должно быть значимым с точки зрения математического образования и с точки зрения математики или её приложений. Оно может расширять и углублять основное содержание школьного курса математики, отражать некоторые современные направления математики, иметь исторический, научно-популярный или прикладной характер.

IV. Методы исследования, используемые в проекте, должны быть доступны для учащихся.

V. Учащиеся должны быть обеспечены литературой, интернет-ресурсами, заданиями для самостоятельной работы и другими учебными материалами для выполнения проекта.

VI. Проект должен допускать выбор индивидуальной траектории его выполнения учащимися таким образом, что переход к следующему этапу выполнения проекта зависит от выполнения предыдущего этапа.

VII. Время, отводимое на проект, должно соответствовать объёму работы, необходимому для выполнения этого проекта.

VIII. Проект должен предполагать объективную оценку его выполнения, например, балльно-рейтинговую систему оценивания выполнения заданий проекта.

Работа учащегося над проектом включает в себя следующие этапы.

1. Выбор темы.
2. Знакомство с литературой, интернет-ресурсами и другими источниками по выбранной теме.
3. Изучение теоретического материала.
4. Выполнение предложенных заданий и решение задач.
5. Ответы на вопросы.
6. Оформление проекта.
7. Выступление с докладом о результатах выполнения проекта или сдача экзамена.

В качестве примера рассмотрим примерное содержание проекта «Окружность Эйлера», рассчитанный на выполнение в течение одного месяца.

Этот проект можно предложить учащимся после изучения теоремы Пифагора, подобия треугольников, замечательных точек и линий треугольника (вписанная и описанная окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот).

СОДЕРЖАНИЕ ПРОЕКТА

1. Исторические сведения о Л. Эйлере.

Литература:

1. *Гиндикин С.Г.* Леонард Эйлер // Квант. 1983 № 10, 11.
2. *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. М.: Просвещение. 1983.
3. https://ru.wikipedia.org.

2. Замечательные точки и линии треугольника.

– точка пересечения высот (ортоцентр);
– точка пересечения медиан (центроид);
– окружность, описанная около треугольника;
– окружность, вписанная в треугольник.

3. Окружность Эйлера.

Литература:

1. *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1962.
2. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. Том 1. М.: МЦНМО, 2004.
3. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006.

Задания для самостоятельной работы

1. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как показано на рисунке 12.1.

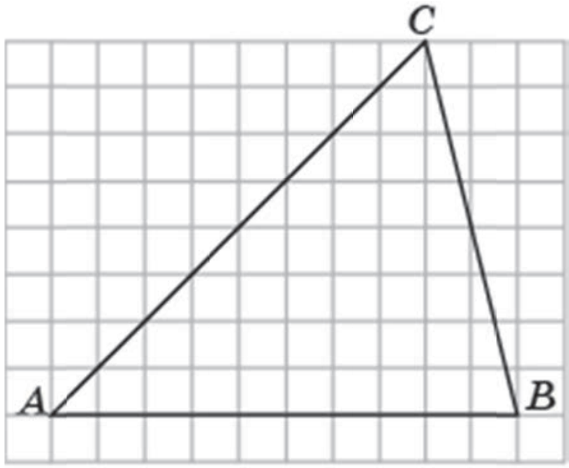

Рис. 12.1

2. Отметьте основания медиан A_1, B_1, C_1, лежащие против вершин соответственно A, B, C треугольника ABC.

3. Проведите высоты CC_2, BB_2, AA_2 и отметьте точку H их пересечения.

4. Отметьте середины A_3, B_3, C_3 соответственно отрезков AH, BH, CH.

5. Через точки C_1, C_2, C_3 проведите окружность. Где находится её центр?

Оказывается, что точки A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 также принадлежат этой окружности. Она называется ***окружностью Эйлера***.

6. Докажите, что точка A_1 принадлежит окружности Эйлера.

7. Докажите, что точка A_3 принадлежит окружности Эйлера.

8. Докажите, что точка A_2 принадлежит окружности Эйлера.

9. Докажите, что точки B_1, B_2, B_3 принадлежат окружности Эйлера.

10. Найдите радиус полученной окружности Эйлера, считая стороны клеток равными 1.

11. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как показано на рисунке 12.2. Отметьте нужные точки и проведите через них окружность Эйлера. Найдите её радиус, считая стороны клеток равными 1.

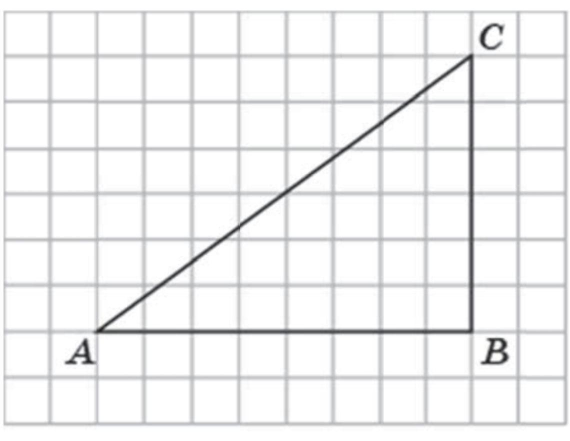

Рис. 12.2

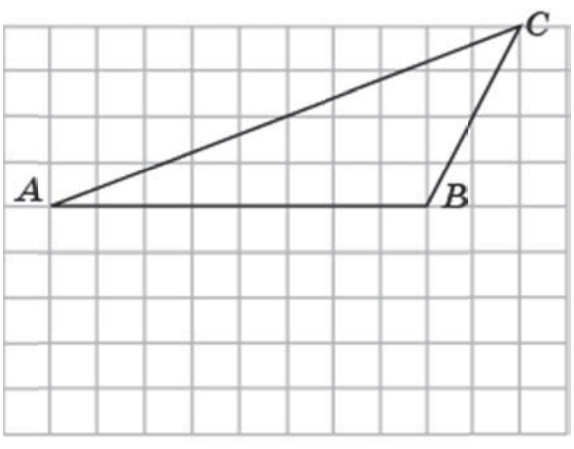

Рис. 12.3

12. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как показано на рисунке 12.3. Отметьте нужные точки и проведите через них окружность Эйлера. Найдите её радиус, считая стороны клеток равными 1.

13. Докажите, что центр N окружности Эйлера треугольника ABC является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр H и центр O описанной около этого треугольника окружности.

14. Докажите, что расстояние от точки O окружности, описанной около треугольника ABC до прямой AB равно половине расстояния от вершины C до ортоцентра H этого треугольника.

15. Докажите, что точка M пересечения медиан треугольника принадлежит отрезку, соединяющему ортоцентр H и центр O описанной окружности этого треугольника, и делит этот отрезок в отношении 1 : 2, считая от точки O.

Прямая, проходящая через ортоцентр, центр окружности Эйлера, точку пересечения медиан и центр окружности, описанной около данного треугольника, называется ***прямой Эйлера.***

16. Докажите, что радиус окружности Эйлера треугольника в два раза меньше радиуса описанной около него окружности.

17. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC, ABH, ACH, BCH совпадают.

Вопросы

1. Может ли окружность Эйлера треугольника проходить через вершину этого треугольника?

2. Окружность Эйлера треугольника проходит через его вершину. Что можно сказать об этом треугольнике?

3. Может ли окружность Эйлера треугольника совпадать с окружностью:

а) описанной около этого треугольника;

б) вписанной в этот треугольник?

4. Окружность Эйлера треугольника совпадает с окружностью, вписанной в этот треугольник. Что можно сказать об этом треугольнике?

5. Центр окружности Эйлера принадлежит высоте треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

6. Центр окружности Эйлера совпадает с ортоцентром треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

7. Центр окружности Эйлера принадлежит медиане треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

8. Центр окружности Эйлера совпадает с центроидом треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

9. Может ли центр окружности Эйлера треугольника находиться:

а) внутри этого треугольника;

б) на стороне этого треугольника;

в) совпадать с вершиной треугольника;

г) вне этого треугольника?

10. Приведите пример треугольника, для которого центр окружности Эйлера находится вне этого треугольника.

11. Приведите пример треугольника, для которого окружность Эйлера проходит через вершину треугольника.

Ответы на задания для самостоятельной работы

2. Точки показаны на рисунке 12.4.

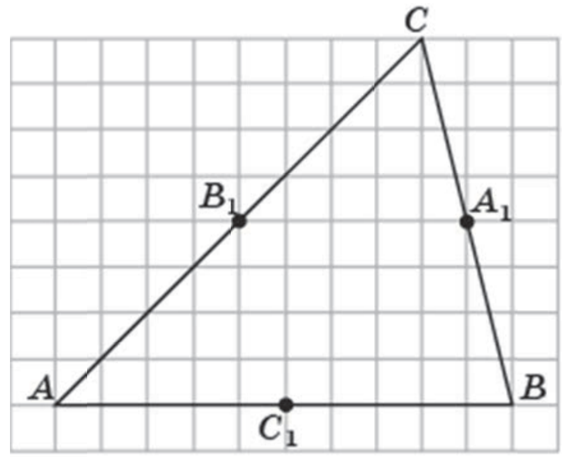

Рис. 12.4

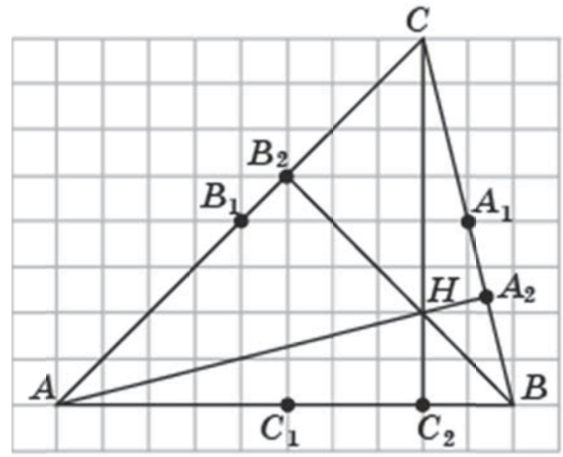

Рис. 12.5

3. Точки показаны на рисунке 12.5.

4. Точки показаны на рисунке 12.6.

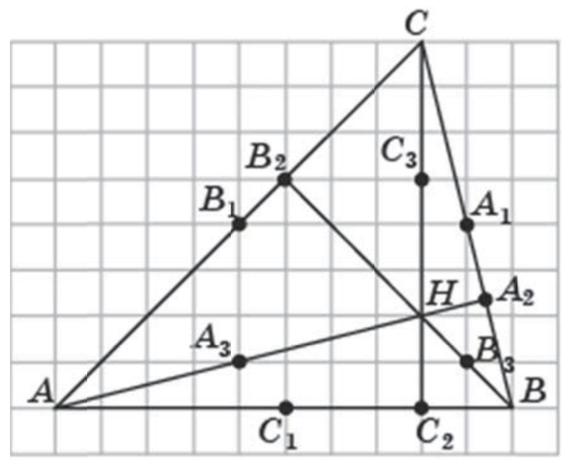

Рис. 12.6

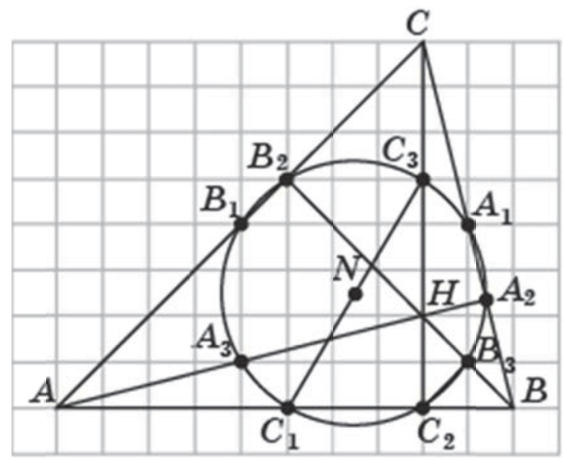

Рис. 12.7

5. Центр N окружности Эйлера находится в середине отрезка C_1C_3 (рис. 12.7).

6. Проведём отрезки A_1C_1 и A_1C_3 (рис. 12.8). Так как C_1C_3 – диаметр окружности Эйлера, то для того, чтобы доказать, что точка A_1 принадлежит этой окружности, достаточно доказать, что угол $C_1A_1C_3$ прямой.

Отрезок A_1C_1 является средней линией треугольника ABC. Следовательно, прямая A_1C_1 параллельна прямой AC.

Отрезок A_1C_3 является средней линией треугольника BCH. Следовательно, прямая A_1C_3 параллельна прямой BH.

Прямые AC и BH перпендикулярны. Следовательно, перпендикулярны прямые A_1C_1 и A_1C_3. Значит, угол $C_1A_1C_3$ прямой и точка A_1 принадлежит окружности Эйлера.

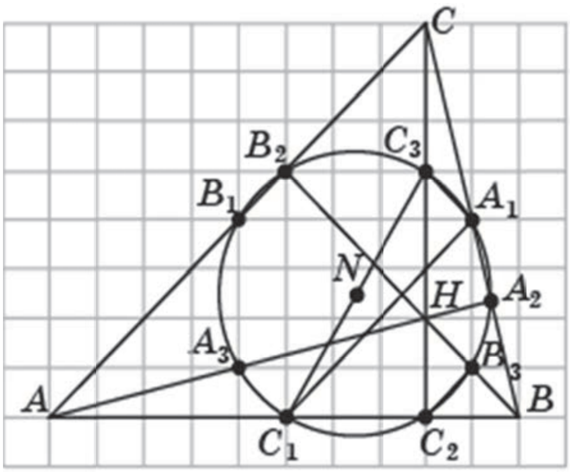

Рис. 12.8

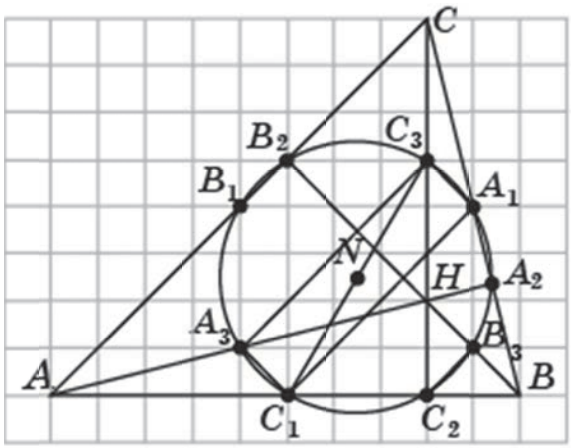

Рис. 12.9

7. Проведём отрезки A_3C_1 и A_3C_3 (рис. 12.9). Так как C_1C_3 – диаметр окружности Эйлера, то для того чтобы доказать, что точка A_3 принадлежит этой окружности, достаточно доказать, что угол $C_1A_3C_3$ прямой.

Отрезок A_3C_3 является средней линией треугольника ACH. Следовательно, прямая A_3C_3 параллельна прямой AC.

Отрезок A_3C_1 является средней линией треугольника ABH. Следовательно, прямая A_3C_1 параллельна прямой BH.

Прямые AC и BH перпендикулярны. Следовательно, перпендикулярны прямые A_3C_3 и A_3C_1. Значит, угол $C_1A_3C_3$ прямой и точка A_1 принадлежит окружности Эйлера.

8. Проведём отрезок A_1A_3 (рис. 12.10).

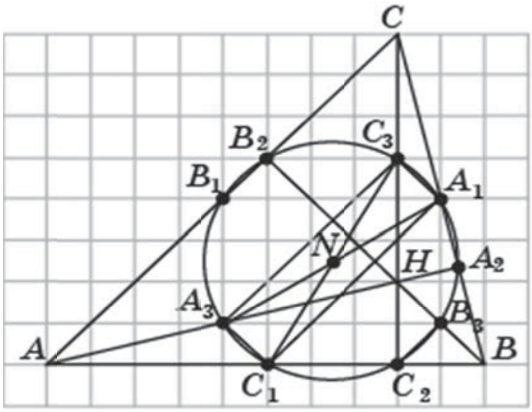

Рис. 12.10

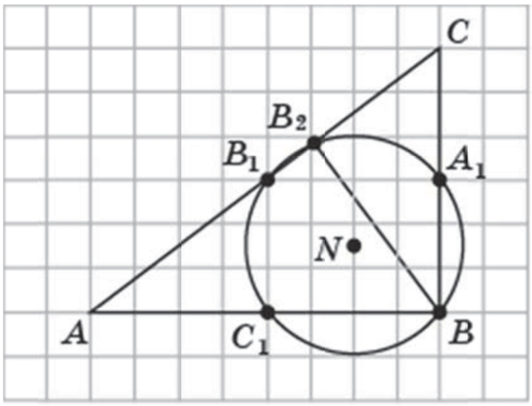

Рис. 12.11

Четырёхугольник $A_1C_1A_3C_3$ – прямоугольник. Следовательно, отрезок A_1A_3 проходит через середину отрезка C_1C_3, т.е. является диаметром окружности Эйлера. Угол $A_1A_2A_3$ прямой. Следовательно, точка A_2 принадлежит окружности Эйлера.

9. Доказательство аналогично доказательству для точек A_1, A_2, A_3.

10. $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

11. Окружность показана на рисунке 12.11. Её радиус равен 2,5.

12. Окружность показана на рисунке 12.12. Её радиус равен $\frac{\sqrt{145}}{4}$.

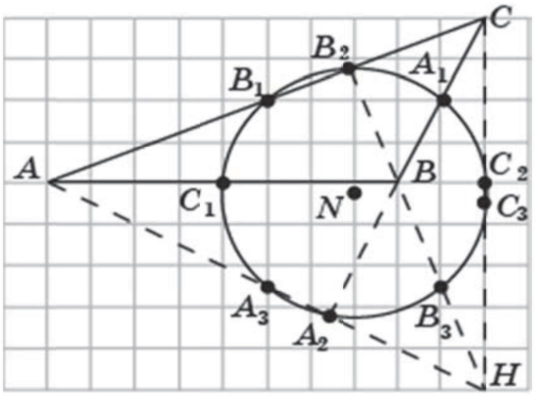

Рис. 12.12

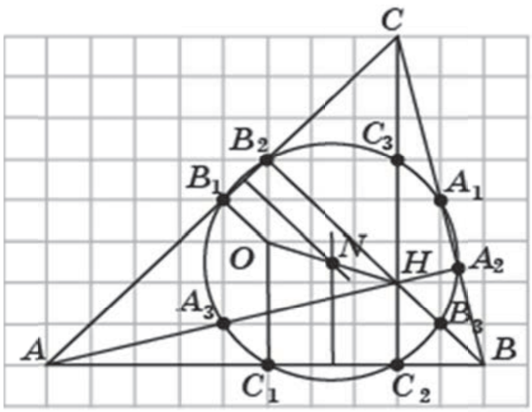

Рис. 12.13

13. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 12.13). Серединный перпендикуляр к хорде C_1C_2 содержит диаметр окружности Эйлера и пересекает отрезок OH в его середине. Серединный перпендикуляр к хорде B_1B_2 содержит диаметр окружности Эйлера и пересекает отрезок OH в его середине. Таким образом, середина отрезка OH является точкой пересечения двух диаметров окружности Эйлера, т.е. является её центром.

14. При введённых ранее обозначениях в треугольнике ABC проведём отрезок C_1C_3 (рис. 12.14). Треугольники C_1NO и C_3NH равны по двум сторонам и углу между ними ($C_1N = C_3N$, $ON = HN$, $\angle C_1NO = \angle C_3NH$). Следовательно, $C_1O = C_3H = \frac{1}{2}CH$.

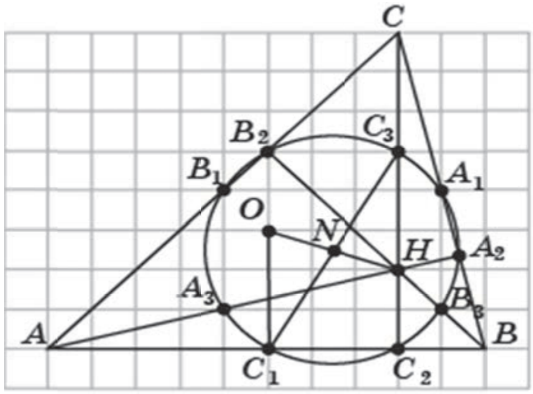

Рис. 12.14

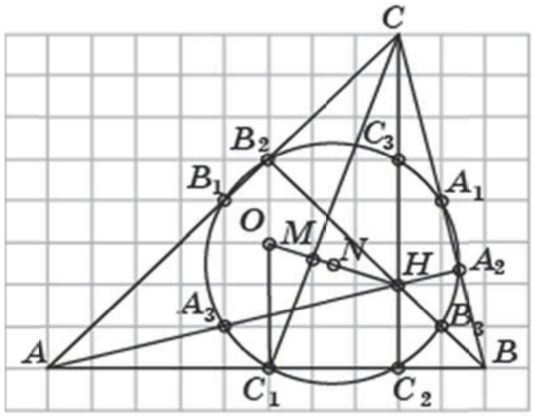

Рис. 12.15

15. При введённых ранее обозначениях в треугольнике ABC проведём медиану CC_1 (рис. 12.15). Обозначим M её точку пересечения с отрезком OH. Треугольники CHM и C_1OM подобны, $C_1O = C_3H = \frac{1}{2}CH$. Следовательно, $C_1M : MC = 1 : 2$. Значит, M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Кроме того, $OM : MH = 1 : 2$.

16. Окружность Эйлера треугольника ABC является окружностью, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, сторонами которого являются средние линии треугольника ABC (рис. 12.16). Так как стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в два раза меньше сторон треугольника ABC, то и радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, в два раза меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

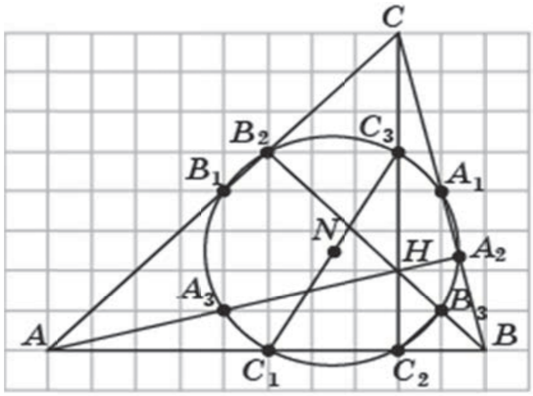

Рис. 12.16

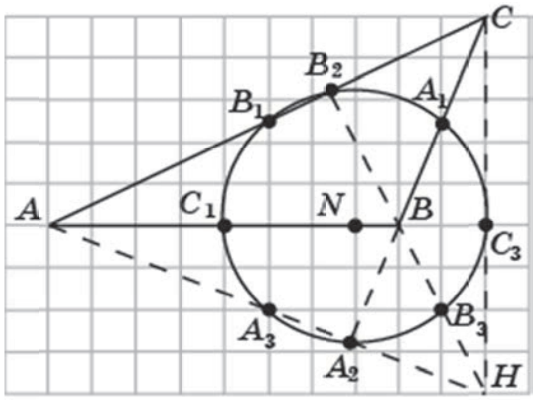

Рис. 12.17

17. Докажем, например, что окружности Эйлера треугольников *ABC* и *ABH* совпадают. Действительно, основаниями высот треугольника *ABH* являются точки A_2, B_2, C_2 (рис. 12.17). Окружность Эйлера треугольника *ABH* проходит через эти точки, следовательно, она совпадает с окружностью Эйлера треугольника *ABC*. Аналогично доказывается, что окружности Эйлера треугольников *ABC*, *ACH* и *BCH* совпадают.

Ответы на вопросы

1. Да.
2. Треугольник прямоугольный.
3. а) Нет; б) да.
4. Треугольник равносторонний.
5. Треугольник равнобедренный.
6. Треугольник равносторонний.
7. Треугольник равнобедренный.
8. Треугольник равносторонний.
9. а), б), в), г) Да.
10. Пример треугольника показан на рисунке 12.17.
11. Пример треугольника показан на рисунке 12.11.

Литература:

1. *Гиндикин С.Г.* Леонард Эйлер // Квант. 1983. № 10. С. 17–24.
2. *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1962.
3. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. Том 1. М.: МЦНМО, 2004.
4. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006.
5. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии. М.: Прометей, 2004.
6. *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. М.: Просвещение. 1983.
7. https://ru.wikipedia.org.

13. ОРГАНИЗАЦИЯ КОММУНИКАТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

В федеральные государственные образовательные стандарты начального, основного и среднего общего образования, как было отмечено выше, включены важные требования к результатам освоения соответствующих образовательных программ. Наряду с личностными и предметными, выделены, так называемые, метапредметные требования. К ним, в частности, отнесены коммуникативные универсальные учебные действия. В составе коммуникативных действий особо выделяется постановка вопросов – инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации [7, с. 70].

В современной жизни часто приходится заполнять всевозможные анкеты, опросники (вопросники), тесты и т.п., в которых приходится отвечать на всевозможные вопросы. Существует даже специальный раздел, который так и называется «Теория вопроса». Любопытно отметить, что, кроме естественной познавательной функции вопроса, особо выделяется и его коммуникативная функция. В неё, прежде всего, входит побуждение к действию, затем установление контакта и эмоциональное сопереживание.

В психологии хорошо известно, что формулировки вопросов, ответы на них напрямую связаны с умственным развитием детей. Например, ещё немецкий педагог Р. Пенциг [2] отмечал важность детских вопросов: «Почему?»; «Зачем?»; «Для чего это нужно?»; «Из чего это сделано»; «Как это сделать?» и т.п. А ответы на них называл критерием познавательной активности ребенка.

Не меньшее значение придаётся вопросам и в дальнейшем, в процессе школьного обучения, в частности и математике. Практически, все учебные задачи начинаются с вопроса, с побуждения к действию. Известный отечественный психолог А.М. Матюшкин придавал очень большое значение при организации обучения, прежде всего, созданию условий, вызывающих познавательную потребность учащихся [1, с. 9]. Такие условия автор назвал проблемными ситуациями. В их основе должны лежать задачи-проблемы. В свою очередь, решения задач-проблем должно начинаться с проблемных вопросов.

В качестве примера приведём геометрические проблемные вопросы [3]. В указанном пособии выделяется шесть типов таких вопросов, а именно, требуется: распознать конфигурацию геометрических фигур по их изображениям и описаниям; сравнить и оценить геометрические величины; установить верность или неверность утверждений; найти ошибки в формулировках и доказательствах; привести контрпримеры; решить задачи с неоднозначным ответом.

1. У многогранника двенадцать вершин. В каждой из них сходится два треугольника и два четырёхугольника. Сколько у него рёбер, треугольных и четырёхугольных граней?

2. Представим, что Земной шар обтянули по экватору верёвкой. Затем длину верёвки увеличили на 3 м и расположили её в виде окружности, концентрической с экватором. Может ли в образовавшийся просвет между поверхностью Земного шара и верёвкой пролезть человек средней комплекции?

3. Верно ли утверждение: «Если расстояние от точки до прямой меньше 1, то и длина любой наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой, меньше 1»?

4. Найдите ошибку в доказательстве следующего утверждения.

Утверждение. Две окружности разных радиусов имеют одинаковую длину.

Доказательство. Предположим, что большая окружность прокатилась по прямой из положения A в положение B и сделала полный оборот. Тогда длина отрезка AB равна длине большей окружности. При этом меньшая окружность переместится из положения A_1 в положение B_1 и также сделает полный оборот. Следовательно, длина отрезка A_1B_1 равна длине меньшей окружности. Учитывая, что отрезки AB и A_1B_1 равны, получаем, что равны длины данных окружностей.

5. Приведите контрпример для следующего утверждения: «Если угол, медиана и высота, проведённые из вершин двух других углов, одного треугольника, соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны».

6. В треугольнике ABC AB=6, AC=BC=5. Через середину D стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке E и отсекающая треугольник, подобный треугольнику ABC. Чему равна сторона DE отсечённого треугольника?

Одна из важных задач организации коммуникативной деятельности учащихся заключается в том, чтобы обеспечить коллективное (или групповое) решение поставленной проблемы. Причём, коллективная работа осуществляется на начальном и заключительном этапах исследования, где происходит сначала обсуждение постановки проблемы, поиска её решения, а потом – оценка достигнутых результатов, их интерпретация. Между этими этапами ученики индивидуально решают свои подпроблемы общей поставленной проблемы. Так организованная деятельность обеспечит общение и взаимодействие учащихся друг с другом, с учителем; поможет научиться согласовывать свои действия с другими участниками решения общей проблемы; таким образом, научит сотрудничеству, что непосредственно связано с проявлением различных эмоций. Назовём несколько тем по геометрии для организации коллективной коммуникативной деятельности обучающихся: «Проблема четырёх красок»; «Третья проблема Д. Гильберта»; «Тела Платона, тела Архимеда, тела Кеплера-Пуансо, тела Каталана»; «О форме футбольного мяча» и др. [4, 5].

Практический опыт работы в школе показывает, что организация коммуникативной деятельности учащихся способствует активизации всего процесса обучения геометрии в целом.

Литература:

1. *Матюшкин А.М.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Директ-Медиа, 2014.

2. *Пенциг Р.* Серьёзные ответы на детские вопросы // Избр. главы из Руководства к семейному воспитанию. СПб.: О. Богданова, 1911.

3. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Геометрические задачи на развитие критического мышления. М.:МЦНМО, 2021.

4. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* О форме футбольного мяча // Математика в школе. 2021. № 2. С. 32–37.

5. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники. М.:МЦНМО, 2010.

6. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / Министерство образования и науки Российской Федерации. М.: Просвещение, 2011. С. 7–10.

7. Фундаментальное ядро содержания общего образования / под ред. В.В. Козлова, А.М. Кондакова. – 4-е изд. М.: Просвещение, 2011.

14. ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

У классика российской и мировой психологии Л.С. Выготского есть замечательная статья, которая называется «Психология и учитель» [1]. Основная идея автора заключается в необходимости развития взаимодействия учителя и учащегося. Очень современно звучат его слова: «На долю учителя выпадает новая ответственная роль. Ему предстоит сделаться организатором той социальной среды, которая является единственным воспитательным фактором. Там, где он выступает в роли простого насоса, накачивающего учеников знаниями, он с успехом может быть заменён учебником, словарём, картой, экскурсией и т.п.». Удивительно, но через целое столетие слова Льва Семёновича звучат особенно актуально в условиях реализации приоритетных направлений развития отечественного образования. Например, без настоящего сотрудничества учителя и обучающихся невозможно сформировать универсальные учебные действия или добиться достижения личностных результатов освоения основных образовательных программ.

Таким образом, основой педагогического сотрудничества, его методологией является, конечно, психология. С практической точки зрения, это означает, что учитель должен выстраивать свою преподавательскую деятельность с опорой на психологическую науку. Другими словами, в профессиональную педагогическую деятельность входит знание учителем основных достижений психологии и умение использовать их в своей повседневной практике. В соответствии с этим рассмотрим важную, на наш взгляд, проблему индивидуализацию обучения, в частности и математике.

Как было замечено выше, одним из основополагающих принципов современного образования является его ориентация на всестороннее формирование личности каждого обучаемого, реализацию всех его задатков, склонностей, способностей, интересов и т.п. В основе такого обучения должны лежать индивидуально-психологические особенности учащихся. Их исследованием занимается специальный раздел психологии, который называется «Дифференциальная психология». Она накопила значительный материал, в том числе экспериментальный и описательный, о вариативности, как отдельных психических свойств человека (памяти, восприятия, внимания, воображения, мышления и т.д.), так и о сложных комплексных образованиях (характере, темпераменте, интересах, склонностях, мотивации и др.).

Большой вклад в разработку исследуемой проблемы внесли труды Б.М. Теплова и его учеников [4]. В их исследованиях изучался вопрос об основных свойствах нервной системы и её значение для психологии индивидуальных различий. К числу таких свойств были отнесены: а) сила нервной системы по отношению к возбуждению, т.е. способность выдерживать длительное возбуждение, не обнаруживая запредельного торможения; б) сила нервной системы по отношению к торможению, т.е. способность выдерживать длительные и часто повторяющиеся тормозные влияния; в) уравновешенность нервной системы по отношению к возбуждению и торможению, которая проявляется в одинаковости реагирования нервной системы на возбудительные и тормозные процессы; г) лабильность нервной системы, оцениваемая по скорости возникновения и прекращения нервного процесса возбуждения или торможения.

Из сказанного следует важный вывод, а именно, поскольку основные свойства нервной системы человека, довольно, устойчивы, то они образуют хорошую почву для формирования определённой формы поведения обучающихся. При этом практическая задача учителя состоит не в том, чтобы изменять их индивидуальные психологические свойства, а в том, чтобы для каждого типа нервной системы определить наилучшие пути обучения.

В связи с этим одно из ведущих мест в изучении индивидуальных особенностей заняло исследование понятия «способность». Заметим, что в отечественной психологии способностями называют не всякие вообще индивидуальные особенности человека, а только те, которые ведут к успешности выполнения какой-либо деятельности или даже многих деятельностей. Важно также подчеркнуть, что одной из существенных особенностей психики человека является возможность чрезвычайно широкой компенсации одних свойств другими, вследствие чего относительная слабость какой-нибудь одной способности вовсе не исключает возможности успешного выполнения даже такой деятельности, которая наиболее тесно связана с этой способностью. Недостающая способность может быть в очень широких пределах компенсирована другими, высокоразвитыми у данного человека.

В работах, где рассматриваются специальные способности к конкретным видам деятельности, выделяются компоненты этих способностей, в качестве которых выступают, прежде всего, индивидуальные особенности психических процессов ощущения, восприятия, мышления, памяти, воображения. Учителя математики, в первую очередь, конечно, интересуют математические способности своих учеников. Например, В.А. Крутецкий выделил следующие параметры развития таких способностей [2]:

1) формализованное восприятие математического материала;

2) обобщение математического материала;

3) свёрнутость математического мышления – тенденция мыслить в процессе математической деятельности сокращенными структурами;

4) гибкость мыслительного процесса;

5) стремление к своеобразной экономии умственных усилий – к изяществу решений;

6) математическая память.

Специально проведённые исследования показали, что все перечисленные компоненты начинают развиваться неодновременно. Причём многие, а именно 3–6, формируются только в старших классах школы, что подчёркивает, в частности, недопустимость ранней специализации учащихся.

Таким образом, учителю математики для личностного развития учеников следует в своей деятельности исходить из возрастных особенностей своих подопечных. В связи с этим подлинным достижением психологии стало обоснование Л.С. Выготским двух уровней психического развития ребёнка, а именно, актуального развития и зоны ближайшего развития. Они определяются сравнением того, что может делать ученик сам, и тем, что он может сделать вместе с учителем, в сотрудничестве с ним.

Для того чтобы сказанное отразить в повседневной школьной практике, мы разработали специальную методику, которую назвали открытой методикой.

Заметим, что здесь не имеется в виду теория открытого обучения, нашедшего признание в некоторых зарубежных школах. Если говорить упрощённо, то с формальной стороны признаками открытого обучения является отсутствие обязательного учебного плана, программы, учащиеся сами могут разрабатывать содержание изучаемого предмета, выбирать виды учебной деятельности, темп учения, его сроки, ликвидируется чётко регламентированная классно-урочная система. Исследователи открытого обучения указывали отрицательные стороны такого обучения, среди которых: падение уровня знаний, твёрдых умений, появление различных нарушений и беспорядков. Эта критика, естественно, справедлива. Вместе с тем, нужно отметить и положительные стороны открытого обучения. Во-первых, стремление к максимальному развитию каждого ученика, во-вторых, свободу выбора для ученика.

Напомним основные принципы разработанной методики.

1. *Направленность обучения на развитие личности ученика*, формирование для каждого школьника своего собственного индивидуального стиля деятельности.

2. *Вариативность обучения*, предполагающая разнообразие его содержания, форм и методов. Этот принцип обеспечивает каждому ученику возможность выбора учебного материала в соответствии со своими индивидуальными возможностями и интересами, предпочтительными формами и методами работы. При этом основное содержание образования не может быть свободным, добровольным или выборочным, оно необходимо для общего развития учащихся. Однако, например, для старших школьников можно предоставить большую самостоятельность в выборе школы, профиля класса, курсов по выбору, дополнительно осваиваемого материала в соответствии со своими индивидуальными возможностями, запросами и интересами.

3. *Валидность обучения*, означающая достаточно высокую значимость математического материала для достижения результатов обучения, решения задач образования, воспитания и развития.

4. *Успешность обучения*, понимаемая нами в том, что у каждого ученика должен быть свой, пусть маленький, но собственный успех в обучении. Успех рождает вдохновение, уверенность в своих силах. Задача учителя – помочь каждому своему ученику достичь такого своего успеха.

5. *Наличие устойчивого интереса к обучению*. Интерес является необходимым условием процесса обучения. Чем ниже интерес, тем формальнее обучение, ниже его результаты. Отсутствие интереса приводит к низкому качеству обучения, быстрому забыванию и даже полной потере приобретённых знаний, умений и

навыков. Чем выше интерес, тем активнее идет процесс обучения, выше его результаты.

6. *Открытость методической работы учителя.* Речь идёт не только о понимании учениками целей обучения, но и о том, чтобы школьники представляли себе, почему, например, они доказывают некоторую теорему, или решают данную задачу, или чем хорошо предложенное индивидуальное задание и т.д. Ученикам должно нравиться построение уроков, их основные этапы, техника проведения каждого из них. Именно в этом смысле мы и называем нашу методику открытой [3].

Учащиеся должны стать непосредственными участниками методической работы учителя, который подробно объясняет им цели своих методический действий, поступков, приёмов. Причём это относится ко всем основным компонентам учебного процесса: целям, содержанию, методам и формам обучения. То, что вызывает неодобрение, неприятие всего класса, должно уйти из учебного процесса. Ученики сознательно принимают всю методическую работу учителя. Ребята не должны воспринимать учителя как человека, который объясняет новый материал, потом спрашивает его, ловит ученика на незнании и при случае ставит двойку. Такой взгляд на учителя явно не будет способствовать успешному решению поставленных задач, какими бы благими они ни были. Несколько лет назад, например, в своём старшем гуманитарном классе, мы объявили ребятам, что вместе будем писать учебник по стереометрии, что без их помощи (что соответствует действительности) хорошей книги не получится. Ребята активно включились в эту деятельность, ведь им предложили серьёзное, взрослое, нужное дело. Мы никогда не жалеем времени на объяснение своих действий, это способствует подключению всего класса к активной учебной деятельности и не жалеем времени на то, чтобы помочь каждому ученику раскрыть себя. В том же классе (гуманитарном, историко-философском) три девочки не могли добиться значительных успехов ни при доказательстве теорем, ни при решении основных задач. Но оказалось, что одна из них прекрасно делает модели многогранников, причём ей удавались сложные – модели полуправильных и правильных звёздчатых многогранников, другая любит решать и решает правильно дополнительные занимательные задачи, а третья с успехом отвечает на вопросы устной работы. При таких достижениях невозможно назвать этих учениц неспособными к геометрии или, как часто бывает в школе, приклеить ярлык «слабый, ни на что не годящийся ученик». Если школьник, действительно, почувствует к себе такое отношение, он будет потерян для учителя, и в результате пострадает весь процесс обучения в целом. В нашем классе тоже была такая ученица, которая в начале 10-го класса даже не пыталась ничего понять, твёрдо уверовав в свою полную неспособность к геометрии. Но постепенно стало проясняться, что это совсем не так. Она смогла проявить себя в устной работе в классе, в решении домашних задач, но главное оказалась непревзойдённой рассказчицей исторических математических экскурсов. Приведённые примеры относятся к классам, где математика изучается на базовом уровне. Но и в математических классах возникают подобные проблемы, ведь у одних ребят ярко выражены и проявляются математические способности, а другие имеют хорошие общие умственные способности. Из сказанного следует важный вывод о необходимости нахождения и формирования для каждого ученика своего собственного индивидуального стиля деятельности. Успех приходит тогда, когда делаешь то, что лучше всего получается, а лучше всего получается, когда занимаешься делом, которое наиболее соответствует личным качествам. Индивидуальный стиль деятельности, возникая сначала на основе некоторых задатков, склонностей ученика, создает активные положительные мотивы, положительное отношение к деятельности, что, в свою очередь, приводит к овладению другими, более сложными, методами учебной деятельности. Это приводит к естественному повышению эффективности обучения в целом.

Литература

1. *Выготский Л.С.* Психология учителя / Педагогическая психология. М.: Педагогика, 1991. С. 358–372.

2. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников. М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО МОДЕК, 1998. С. 364, 365.

3. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии: монография. М.: Прометей, 2004. [Электронный ресурс]. М.: Дрофа, 2012. (*drofa.ru*)].

4. *Теплов Б.М.* Проблемы индивидуальных различий / Избр. труды в 2-х томах. Том 1. М.: Педагогика, 1985. С. 14–222.

Смирнова Ирина Михайловна,
доктор педагогических наук, профессор,
профессор кафедры элементарной математики
Московского педагогического государственного университета

Смирнов Владимир Алексеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой элементарной математики
Московского педагогического государственного университета

ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Монография

Подписано в печать 27.10.2022 г. Формат 60x88/16
Печать офсетная. Печ. л. 9,12. Тираж 500 экз.

Институт развития образовательных технологий
141207, Московская область, г. Пушкино,
ул. Надсоновская, д. 24, офис 314

Отпечатано в типографии ООО «ПКФ «СОЮЗ–ПРЕСС»
150062, г. Ярославль, пр-д Доброхотова, 16-158
Тел. (4852) 58-76-39, 58-76-33