ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛОГИИ ДЛЯ ЗНАКОМСТВА УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ С МНОГОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: многомерная геометрия, гиперпространство, аксиомы, гипермногогранники.

Аннотация: в работе рассматриваются возможности изучения основных понятий и свойств фигур многомерной геометрии.

USING THE ANALOGY METHOD TO INTRODUCE HIGH SCHOOL STUDENTS TO MULTIDIMENSIONAL GEOMETRY

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Keywords: multidimensional geometry, hyperspace, axioms, hyperpolyhedra.

Astract: the paper considers the possibilities of studying the basic concepts and properties of figures of multidimensional geometry.

Многомерные пространства возникают естественным образом в различных задачах математики, физики и многих других наук.

Современная геометрия изучает многомерные пространства и свойства фигур, расположенных в этих пространствах.

Мы живем в четырёхмерном пространстве, в котором роль четвёртого измерения играет время.

Знакомство с основными понятиями многомерной геометрии позволяет не только узнать, как устроено многомерное пространство, но и лучше понять строение обычного трёхмерного пространства, сформировать необходимые пространственные представления.

Многие формулировки определений, свойств и теорем многомерной геометрии могут быть установлены по аналогии с соответствующими формулировками планиметрии и стереометрии. Поиск таких аналогий, нахождение аналогичных формулировок, проведение доказательств по аналогии позволяет освоить один из основных методов математики – метод аналогии.

Решение задач и доказательство теорем многомерной геометрии в гораздо большей степени, чем решение задач и доказательство теорем обычной геометрии, способствует развитию логического мышления, поскольку опирается на логические рассуждения.

Переход от трёхмерной к четырёхмерной геометрии является наиболее важным шагом при изучения многомерной геометрии. Дальнейшее увеличение размерности не создаёт каких-либо принципиально новых эффектов. Основные свойства, теоремы и задачи n-мерной геометрии, при $n > 4$, формулируются, доказываются и решаются по аналогии со свойствами, теоремами и задачами четырёхмерной геометрии.

Основные понятия и аксиомы

Основными понятиями четырёхмерной геометрии являются: точка, прямая, плоскость, пространство и гиперпространство.

Напомним аксиомы стереометрии (трёхмерной геометрии), перечисленные, например, в учебнике [3].

1. Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.

2. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

4. Существуют, по крайней мере, четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

5. Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.

По аналогии с аксиомами стереометрии, сформулируем аксиомы четырёхмерной геометрии.

Первые две из них повторяют первые две аксиомы стереометрии.

1. Через любые две точки гиперпространства проходит единственная прямая.

2. Через любые три точки гиперпространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.

Третья аксиома дополняет первые две аксиомы.

3. Через любые четыре точки гиперпространства, не принадлежащие одной плоскости, проходит единственное пространство.

Четвёртая аксиома аналогична третьей аксиоме стереометрии, в которой прямая заменяется на плоскость, а плоскость – на пространство.

4. Если два пространства в гиперпространстве имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости.

Пятая и шестая аксиомы аналогичны четвёртой и пятой аксиомам стереометрии.

5. В гиперпространстве существуют, по крайней мере, пять точек, не принадлежащих одному пространству.

6. Для прямых, плоскостей и пространств гиперпространства выполняются аксиомы стереометрии.

Учащимся можно предложить, используя эти аксиомы, решить следующие задачи.

1. Докажите, что если прямая имеет с пространством две общие точки, то она лежит в этом пространстве.

2. Докажите, что две прямые всегда лежат в одном пространстве.

3. Докажите, что если плоскость имеет с пространством три общие точки, не принадлежащие одной прямой, то она лежит в этом пространстве.

4. Докажите, что через плоскость и не принадлежащую ей точку проходит единственное пространство.

5. Докажите, что через две плоскости, имеющих общую прямую, проходит единственное пространство.

6. Докажите, что через плоскость и пересекающую её прямую проходит единственное пространство.

Гипермногогранники

Перейдём теперь к определениям аналогов многогранников в четырёхмерном пространстве. Будем называть их гипермногогранниками.

Напомним, что многогранником в пространстве называется тело, ограниченное конечным числом многоугольников, называемых гранями этого многогранника.

Гипермногогранником будем называть тело в гиперпространстве, ограниченное конечным числом многогранников, называемых ***гипергранями***. Грани, рёбра и вершины этих многогранников называются соответственно ***гранями, рёбрами*** и ***вершинами*** гипермногогранника.

Приведём примеры гипермногогранников и дадим их определения по аналогии с определениями соответствующих многогранников [3].

По аналогии с определениями треугольника на плоскости и тетраэдра в пространстве определим понятие гипертетраэдра в гиперпространстве.

Напомним, что треугольник – многоугольник, сторонами которого являются три отрезка. Тетраэдр – многогранник, гранями которого являются четыре треугольника.

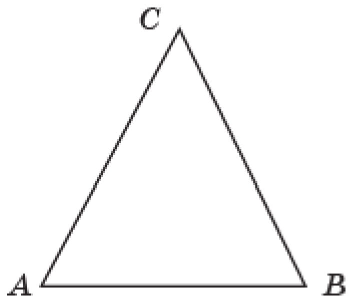
Гипертетраэдр – гипермногогранник, гипергранями которого являются пять тетраэдров.

Гипертетраэдр, гранями которого являются правильные тетраэдры, называется ***правильным***.

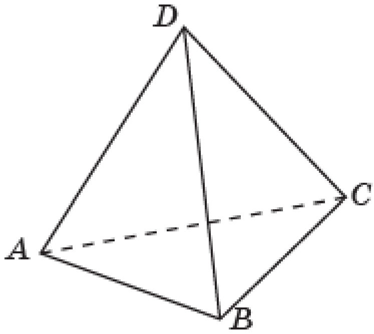
Для изображения гипертетраэдра также будем использовать аналогию с изображениями треугольника и тетраэдра.

Изображение треугольника ABC можно получить, используя изображение отрезка AB, добавив новую точку C, не принадлежащую прямой AB, и соединив её с точками A и B (рис. 1, а).

Изображение тетраэдра $ABCD$ можно получить, используя изображение треугольника ABC, добавив новую точку D, не принадлежащую плоскости ABC, и соединив её с точками A, B и C (рис. 1, б).



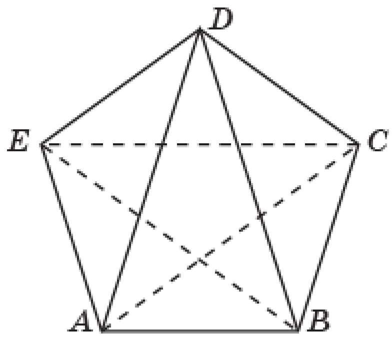
а)



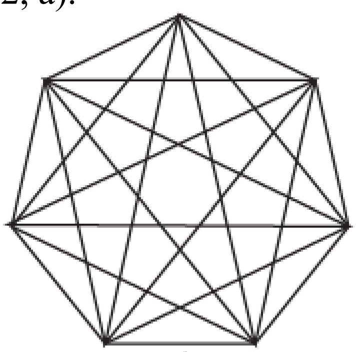
б)

Рис. 1

Аналогично, изображение гипертетраэдра можно получить, используя изображение тетраэдра *ABCD*, добавив новую точку *E*, и соединив её с точками *A*, *B*, *C* и *D* (рис. 2, а).



а)



б)

Рис. 2

Ясно, как определить 5-мерный, 6-мерный и т. д. тетраэдры и получить их изображения. Например, на рисунке 2, б приведено изображение 6-мерного тетраэдра.

По аналогии с определением куба в пространстве [3], определим понятие гиперкуба в гиперпространстве.

Напомним, что куб – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов.

Гиперкуб – гипермногогранник, гипергранями которого являются восемь кубов.

Прямоугольный гиперпараллелепипед – гипермногогранник, гипергранями которого являются восемь прямоугольных параллелепипедов.

Для изображения гиперкуба также будем использовать аналогию с изображениями квадрата и куба [1], [2].

Изображение квадрата *ABCD* можно получить, используя изображение отрезка *AB*, добавив отрезок *CD*, параллельный отрезку *AB*, и соединив его концы с точками *A* и *B* (рис. 3, а).

Изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно получить, используя изображение квадрата *ABCD*, добавив изображение квадрата $A_1B_1C_1D_1$, параллельного изображению квадрата *ABCD*, и соединив его с соответствующими вершинами изображения квадрата *ABCD* (рис. 3, б).

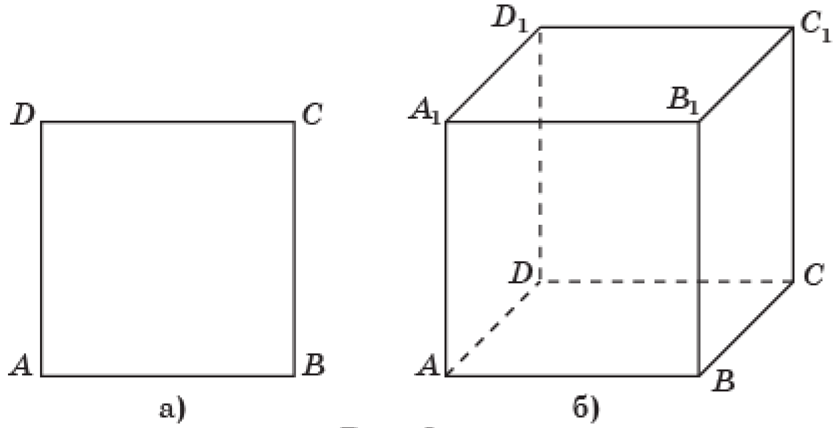


Рис. 3

Аналогично, изображение гиперкуба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ можно получить, используя изображение куба $ABCDEFGH$, добавив изображение куба $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$, параллельного изображению куба $ABCDEFGH$, и соединив его вершины с вершинами исходного изображения куба (рис. 4).

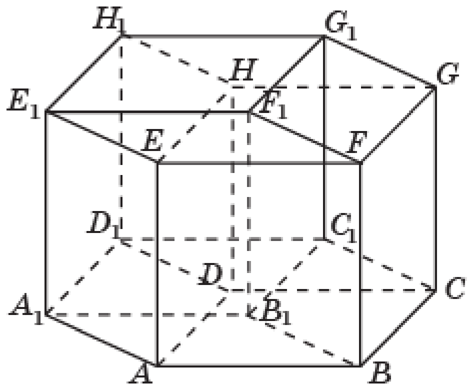


Рис. 4

Заметим, что для изображения параллельной проекции гиперкуба, достаточно изобразить четыре его ребра, выходящих из одной вершины (рис. 5, а). Тогда остальные рёбра этого гиперкуба будут изображаться отрезками, параллельными изображённым (рис. 5, б).

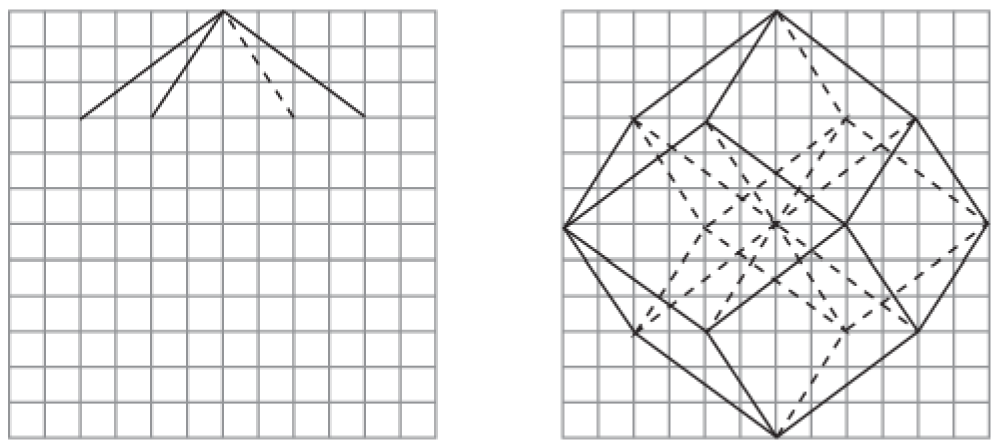


Рис. 5

Учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Сколько у гиперкуба: а) вершин; б) рёбер; в) 2-мерных граней; г) 3-мерных граней?

Ответ: а) 16; б) 32; в) 24; г) 8.

2. Сколько вершин у n-мерного куба?

Ответ. 2^n.

3*. Докажите, что у n-мерного куба имеется $2^{n-k}C_n^k$ k-мерных граней.

Решение. Из каждой вершины n-мерного куба выходит n рёбер. Каждый набор из k этих рёбер определяет k-мерную грань с данной вершиной. Число таких k-мерных граней с данной вершиной равно C_n^k. Так как число вершин n-мерного куба равно 2^n, и в каждой вершине сходится C_n^k k-мерных граней, то общее число таких граней равно $2^n C_n^k$. Однако, при таком подсчёте граней мы каждую k-мерную грань посчитаем 2^k раз (по числу её вершин). Следовательно, искомое число k-мерных граней n-мерного куба равно $2^{n-k}C_n^k$.

Взаимное расположение прямых, плоскостей и пространств

По аналогии с определениями параллельности и перпендикулярности в пространстве двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей, учащимся можно предложить сформулировать следующие признаки параллельности и перпендикулярности для гиперпространства, а также решить следующие задачи.

1. Сформулируйте признак параллельности прямой и пространства.

2. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и пространства.

3. Сформулируйте признак параллельности двух пространств.

4. Имеются ли параллельные рёбра у гипертетраэдра?

5. Запишите рёбра правильного гипертетраэдра $ABCDE$, перпендикулярные ребру AB.

6. Запишите рёбра гиперкуба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$: а) параллельные ребру AB; б) перпендикулярные ребру AB.

7. В гиперкубе $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ укажите какие-нибудь параллельные рёбра и грани.

8. Верно ли, что если прямая параллельна прямой, пересекающей плоскость в гиперпространстве, то она также пересекает эту плоскость?

9. В гиперкубе $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ укажите рёбра, перпендикулярные плоскости ABC.

10. Верно ли, что если прямая, перпендикулярна плоскости в гиперпространстве, то она пересекает эту плоскость?

11. В гиперкубе $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ укажите какие-нибудь параллельные рёбра и гиперграни.

12. В гиперкубе $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ укажите гиперграни, перпендикулярные ребру AB.

13. В гиперкубе $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ укажите рёбра, перпендикулярные гиперграни $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

14. Укажите какие-нибудь параллельные грани у гиперкуба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$.

15. Укажите какие-нибудь параллельные гиперграни у гиперкуба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$.

16. Определите понятие угла между двумя пересекающимися пространствами. В правильном гипертетраэдре $ABCDE$ найдите угол между пространствами $ABCD$ и $ABCE$.

Вписанные и описанные гиперсферы

Используя аналогию с вписанными и описанными фигурами в пространстве, найдём радиусы вписанных и описанных гиперсфер единичного куба и правильного единичного гипертетраэдра [4].

По аналогии с понятиями окружности и сферы, определим понятие гиперсферы, как фигуры, состоящей из всех точек гиперпространства, удалённых от данной точки на данное расстояние.

Гиперсфера называется описанной около гипермногогранника, если все вершины этого гипермногогранника принадлежат данной гиперсфере.

Гиперсфера называется вписанной в гипермногогранник, если все гиперграни этого гипермногогранника касаются данной гиперсферы, т. е. имеют с гиперсферой только одну общую точку.

Для нахождения радиуса гиперсферы, описанной около единичного гиперкуба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$, найдём его диагональ BH_1.

Напомним, что диагональ BH единичного куба $ABCDEFGH$ равна $\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника BHH_1, в котором катеты BH и HH_1 равны соответственно $\sqrt{3}$ и 1, находим $BH_1 = 2$. Середина O диагонали BH_1 является центром описанной гиперсферы. Радиус R описанной гиперсферы равен 1 (рис. 6).

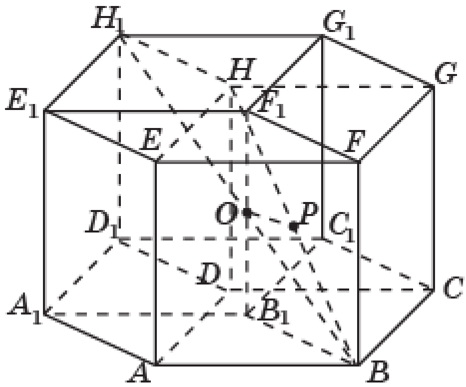


Рис. 6

Найдём расстояние от точки O до гиперграни $ABCDEFGH$. Через точку O проведём прямую, параллельную прямой H_1H, и обозначим P её точку пересечения с отрезком BH. Отрезок OP является перпендикуляром, опущенным из точки O на гипергрань $ABCDEFGH$. Его длина равна 0,5. Следовательно, радиус r вписанной гиперсферы равен 0,5.

В качестве самостоятельной работы учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Докажите, что диагональ прямоугольного гиперпараллелепипеда, рёбра которого, выходящие из одной вершины, равны a, b, c, d, равна $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

2. Найдите радиус гиперсферы, описанной около прямоугольного гиперпараллелепипеда, рёбра которого, выходящие из одной вершины, равны a, b, c, d.

3. Найдите диагональ единичного n-мерного куба.

Ответ. $\sqrt{n}$.

4. Найдите радиус сферы, описанной около n-мерного единичного куба.

Ответ. $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

5. Найдите радиус сферы, вписанной в n-мерный единичный куб.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Заметим, что радиус сферы, описанной около n-мерного куба, стремится к бесконечности при n стремящемся к бесконечности.

Перейдём теперь к правильному гипертетраэдру.

Для нахождения радиуса гиперсферы, описанной около правильного единичного гипертетраэдра найдём его высоту.

Напомним, как находится высота правильного единичного тетраэдра $ABCD$ (рис. 7). Пусть G – середина ребра BC, AA_1 и DD_1 – высоты, соединяющие вершины тетраэдра соответственно с центроидами A_1 и D_1 противолежащих граней. Эти точки делят отрезки DG и AG в отношении 2 : 1, считая от вершин. $AG = DG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AD_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, высота DD_1 равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

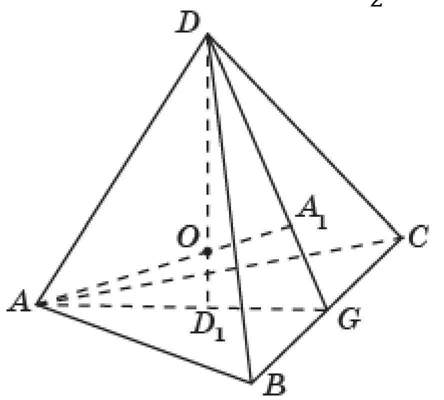


Рис. 7

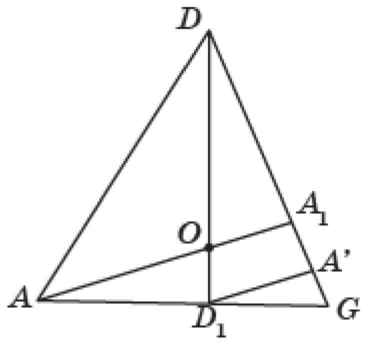


Рис. 8

Докажем, что точка O пересечения отрезков AA_1 и DD_1 делит эти отрезки в отношении 3 : 1, считая от вершин (рис. 8). Через точку D_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1, и обозначим A' её точку пересечения с отрезком DG. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{A_1A'}{A'G} = \frac{AD_1}{D_1G} = \frac{2}{1}$. Кроме этого, имеет место равенство $\frac{DA_1}{A_1G} = \frac{2}{1}$. Следовательно, $\frac{DO}{OD_1} = \frac{DA_1}{A_1A'} = \frac{3}{1}$.

Радиус r вписанной сферы равен длине отрезка OD_1. Следовательно, $r = \frac{\sqrt{6}}{12}$. Радиус R описанной сферы равен длине отрезка OD. Следовательно, $R = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Рассмотрим теперь правильный единичный гипертетраэдр $ABCDE$ (рис. 9).

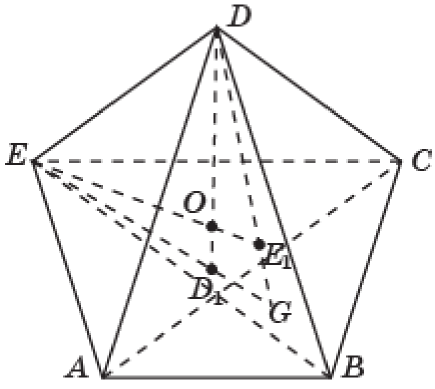


Рис. 9

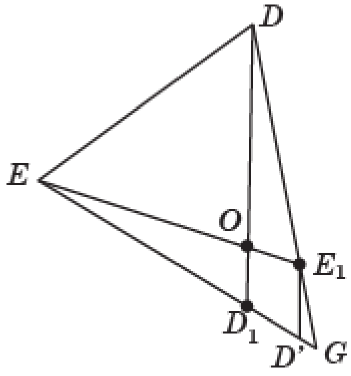


Рис. 10

Пусть G – центроид грани ABC. DG и EG – высоты тетраэдров соответственно $ABCD$ и $ABCE$, $DG = EG = \frac{\sqrt{6}}{3}$. E_1 и D_1 – центроиды тетраэдров соответственно $ABCD$ и $ABCE$. Они делят высоты этих тетраэдров в отношении 3 : 1, считая от вершин. Из прямоугольного треугольника DEE_1 находим высоту EE_1 гипертетраэдра, $EE_1 = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Докажем, что точка O пересечения отрезков DD_1 и EE_1 делит эти отрезки в отношении 4 : 1, считая от вершин (рис. 10). Через точку E_1 проведём прямую, параллельную прямой DD_1, и обозначим D' её точку пересечения с отрезком EG. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{D_1D'}{D'G} = \frac{DE_1}{E_1G} = \frac{3}{1}$. Кроме этого, имеет место равенство $\frac{ED_1}{D_1G} = \frac{3}{1}$. Следовательно, $\frac{EO}{OE_1} = \frac{ED_1}{D_1D'} = \frac{4}{1}$.

Радиус r вписанной сферы равен длине отрезка OE_1. Следовательно, $r = \frac{\sqrt{10}}{20}$. Радиус R описанной сферы равен длине отрезка OE. Следовательно, $R = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Найдём высоту и радиусы описанной и вписанной сфер для единичного n-мерного тетраэдра. Обозначим их соответственно h_n, R_n и r_n.

Как следует из приведённых выше рассуждений для гипертетраэдра, имеют место формулы

$$h_4 = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}h_3\right)^2},\ R_4 = \frac{4}{5}h_4,\ r_4 = \frac{1}{5}h_4.$$

Такими же рассуждениями можно доказать, что аналогичные формулы имеют место и для единичного n-мерного тетраэдра. А именно,

$$h_n = \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}h_{n-1}\right)^2},\ R_n = \frac{n}{n+1}h_n,\ r_n = \frac{1}{n+1}h_n.$$

Учащимся можно предложить, используя эти формулы, доказать справедливость следующих формул

$$h_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}},\ R_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}},\ r_n = \sqrt{\frac{1}{2n(n+1)}}.$$

Заметим, что радиус сферы, вписанной в n-мерный куб, стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

Гиперобъём гипермногогранников

По аналогии с нахождением объёмов многогранников, использующим принцип Кавальери в пространстве [3], найдем гиперобъёмы некоторых гипермногогранников.

Будем считать, что гиперобъём единичного гиперкуба равен 1. Гиперобъём прямоугольного гиперпараллелепипеда, рёбра которого, выходящие из одной вершины, равны a, b, c, d, равен $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Учащимся можно предложить сформулировать принцип Кавальери для фигур в гиперпространстве и доказать следующие теоремы.

1. Объём гиперпризмы равен произведению объёма её основания на высоту.

2. Гиперобъём гиперпирамиды равен одной четвёртой произведения объёма её основания на высоту.

3. Гиперобъём единичного гипертетраэдра равен $\frac{\sqrt{5}}{96}$.

Можно доказать, что объём n-мерной пирамиды равен произведению объёма её основания на высоту, делёную на n. В частности, для объёма V_n единичного n-мерного тетраэдра имеет место формула

$$V_n = \frac{1}{n} V_{n-1} \cdot h_{n-1}.$$

Учащимся можно предложить, используя эту формулу и формулу для высоты единичного n-мерного тетраэдра, доказать справедливость следующей формулы для объёма единичного n-мерного тетраэдра

$$V_n = \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что объём единичного n-мерного тетраэдра стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Н. Как начертить n-мерный куб // Квант. – 1975. – № 8. – С. 11-16.

2. Дужин С., Рубцов В. Четырёхмерный куб // Квант. – 1986. – № 6. – С. 3-7.

3. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 10 класс (11 класс): учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). М.: Мнемозина, 2019.