И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

Задачи на нахождение объёмов многогранников, развивающие пространственные представления учащихся[1]

Как показывает анализ результатов Единого государственного экзамена по математике, основная трудность при решении задач на нахождение геометрических величин связана не столько с недостатками, вызванными незнанием формул и теорем или неумением их применять, сколько с недостаточно развитыми пространственными представлениями, неумением правильно изобразить пространственную ситуацию, указанную в задаче.

В настоящей статье предлагается серия из двух типов задач на нахождение объёмов многогранников.

Первый тип – задачи на нахождение объёма многогранника, являющегося частью параллелепипеда, призмы или пирамиды, для которого указаны его вершины. Часть из них имеет уровень трудности, соответствующий части В ЕГЭ по математике, другая часть имеет уровень трудности, соответствующий части С ЕГЭ по математике.

Для решения задач этого типа нужно:

1) выяснить, какой многогранник имеет заданные вершины;

2) вычислить, какую часть исходного многогранника составляет этот многогранник.

Ко второму, более сложному, типу относятся задачи на нахождение объёма общей части двух многогранников, заданных своими вершинами и являющихся частями параллелепипеда, призмы или пирамиды. Большинство из них имеют уровень трудности, соответствующий части *С* ЕГЭ по математике.

Для решения задач этого типа требуется:

1) выяснить, какие два многогранника имеют заданные вершины;

2) найти многогранник, являющийся их общей частью;

3) вычислить, какую часть этот многогранник составляет от исходного многогранника.

Предлагаемые задачи не только вырабатывают навыки нахождения объёмов многогранников, но, что более важно, учат проводить дополнительные построения, развивают пространственные представления учащихся.

Задачи первого типа

Задача 1. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, D, A_1, B, C, B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Искомым многогранником является треугольная призма ADA_1BCB_1 (рис. 42.1). Её объём равен 0,5.

---

[1] Математика в школе. – 2012. – № 10. – С. 28-34.

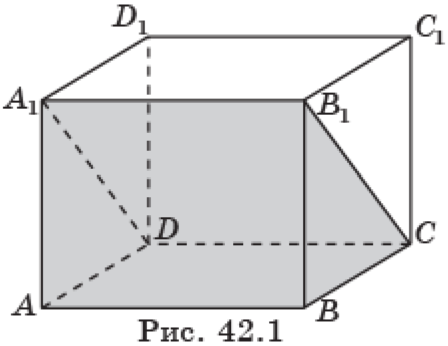

Рис. 42.1

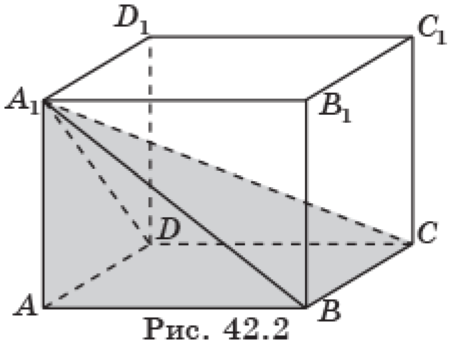

Рис. 42.2

Задача 2. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида A_1ABCD (рис. 42.2). Ее объём равен $\frac{1}{3}$.

Задача 3. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Искомым многогранником является треугольная пирамида A_1ABC (рис. 42.3). Её объём равен $\frac{1}{6}$.

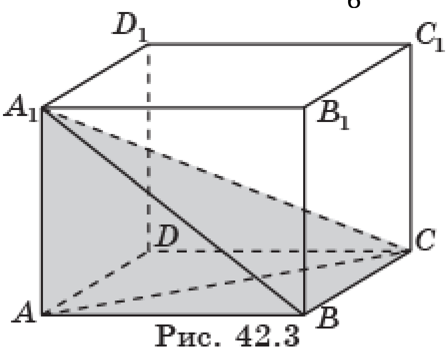

Рис. 42.3

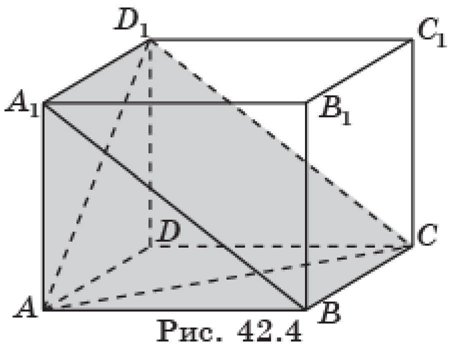

Рис. 42.4

Задача 4. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида $ABCD_1A_1$ (рис. 42.4). Она получается, если из треугольной призмы ABA_1DCD_1, объём которой равен 0,5, вырезать треугольную пирамиду D_1ACD, объём которой равен $\frac{1}{6}$. Следовательно, искомый объём четырёхугольной пирамиды равен $\frac{1}{3}$.

Задача 5. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, B_1, D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Искомым многогранником является треугольная пирамида ACB_1D_1 (рис. 42.5). Она получается, если из исходного параллелепипеда вырезать четыре треугольные пирамиды $A_1AB_1D_1$, $BACB_1$, $C_1CB_1D_1$, $DACD_1$, объём каждой из которых равен $\frac{1}{6}$. Следовательно, искомый объём треугольной пирамиды равен $\frac{1}{3}$.

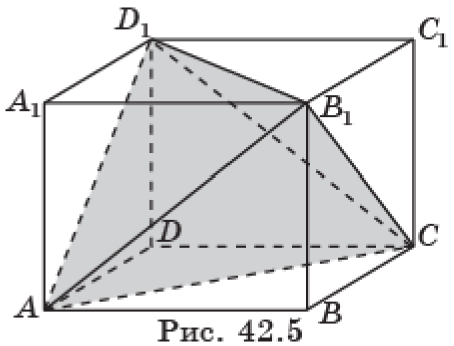

Рис. 42.5

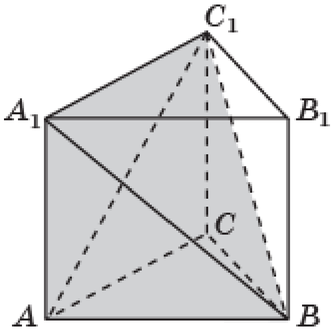

Рис. 42.6

Задача 6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, A_1, C_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, объём которой равен 1.

Решение. Искомым многогранником является треугольная пирамида ABA_1C_1 (рис. 42.6). Она получается, если из исходной призмы вырезать две треугольные пирамиды C_1ABC и $B_1BA_1C_1$, объёмы которых равны $\frac{1}{3}$. Следовательно, искомый объём треугольной пирамиды равен $\frac{1}{3}$.

Задача 7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, объём которой равен 1.

Решение. Искомым многогранником является треугольная пирамида A_1ABC (рис. 42.7). Её объём равен $\frac{1}{18}$.

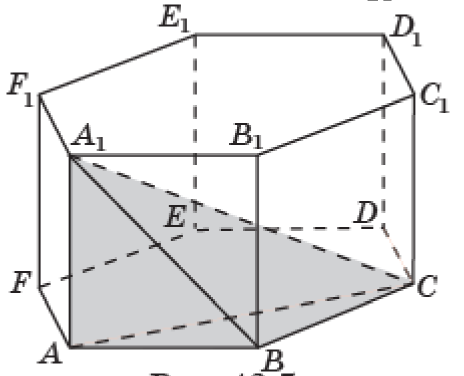

Рис. 42.7

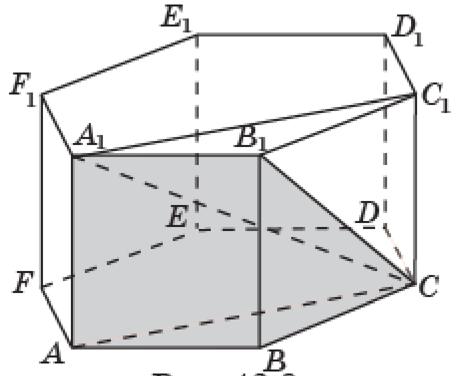

Рис. 42.8

Задача 8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, объём которой равен 1.

Решение. Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида $CABB_1A_1$ (рис. 42.8). Она получается, если из треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, объём которой равен $\frac{1}{6}$, вырезать треугольную пирамиду $CA_1B_1C_1$, объём которой равен $\frac{1}{18}$. Следовательно, искомый объём четырёхугольной пирамиды равен $\frac{1}{9}$.

Задача 9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, объём которой равен 1.

Решение. Искомым многогранником является треугольная пирамида ABB_1C_1 (рис. 42.9).

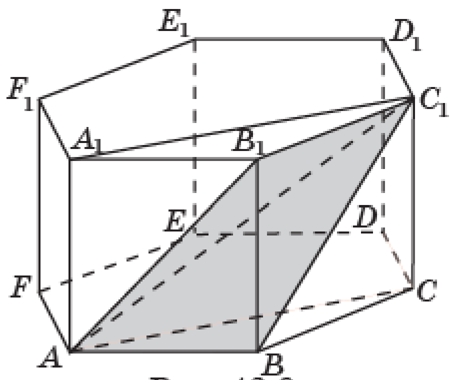

Рис. 42.9

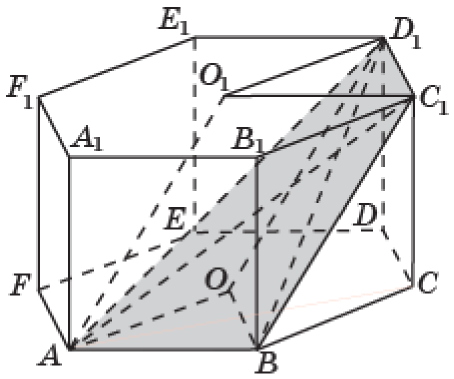

Рис. 42.10

Она получается, если из треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, объём которой равен $\frac{1}{6}$, вырезать треугольные пирамиды $AA_1B_1C_1$ и C_1ABC, объём каждой из которых равен $\frac{1}{18}$. Следовательно, искомый объём треугольной пирамиды равен $\frac{1}{18}$.

Задача 10. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C_1, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, объём которой равен 1.

Решение. Рассмотрим треугольную призму $ABOO_1C_1D_1$ (рис. 42.10), где O и O_1 – центры оснований исходной призмы. В силу задачи 6, искомый объём тетраэдра ABC_1D_1 равен $\frac{1}{3}$ объёма треугольной призмы $ABOO_1C_1D_1$, который равен $\frac{1}{6}$. Следовательно, искомый объём тетраэдра ABC_1D_1 равен $\frac{1}{18}$.

Задачи второго типа

Задача 11. Найдите объём общей части двух треугольных призм ADA_1BCB_1 и ABA_1DCD_1, содержащихся в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Общей частью данных призм является четырёхугольная пирамида A_1ABCD (рис. 42.11), объём которой равен $\frac{1}{3}$.

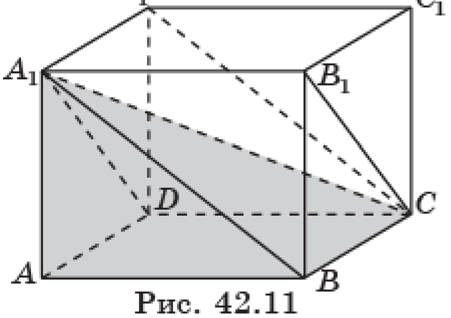

Рис. 42.11

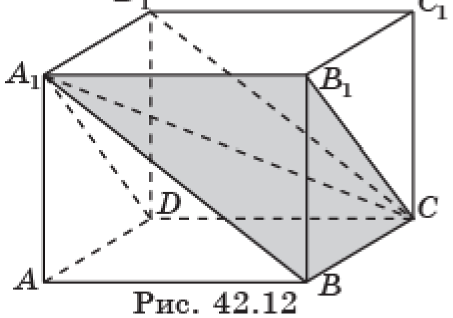

Рис. 42.12

Задача 12. Найдите объём общей части двух треугольных призм ADA_1BCB_1 и $BA_1B_1CD_1C_1$, содержащихся в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Общей частью данных призм является треугольная пирамида A_1BCB_1 (рис. 42.12), объём которой равен $\frac{1}{6}$.

Задача 13. Найдите объём общей части двух четырёхугольных пирамид A_1ABCD и $ABCC_1B_1$, содержащихся в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Общей частью данных пирамид является четырёхугольная пирамида $ABCOP$ (рис. 42.13), где O – центр параллелепипеда, P – центр грани ABB_1A_1. Она разбивается на две треугольные пирамиды $OABP$ и $OABC$, объёмы которых равны соответственно $\frac{1}{24}$ и $\frac{1}{12}$. Следовательно, искомый объём равен $\frac{1}{8}$.

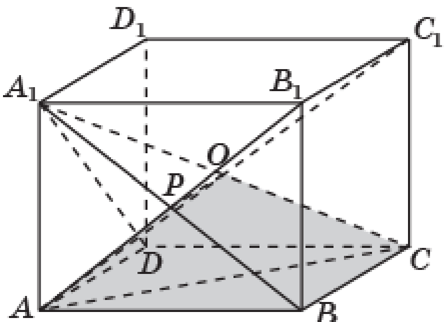

Рис. 42.13

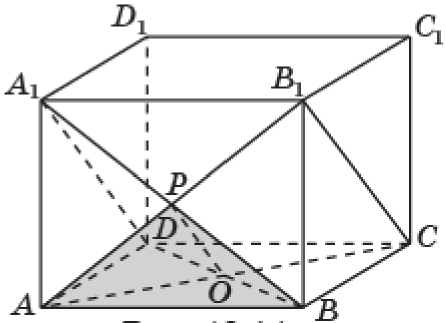

Рис. 42.14

Задача 14. Найдите объём общей части двух треугольных пирамид A_1ABD и B_1ABC, содержащихся в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объём которого равен 1.

Решение. Общей частью данных пирамид является треугольная пирамида $PABO$ (рис. 42.14), где O – центр грани $ABCD$, P – центр грани ABB_1A_1. Её объём равен $\frac{1}{24}$.

Задача 15. Объём треугольной пирамиды $SABC$ равен 1, D – середина ребра SB, E – середина ребра SC. Найдите объём общей части двух пирамид $DABC$ и $EABC$.

Решение. Общей частью двух пирамид $DABC$ и $EABC$ является треугольная пирамида $FABC$ (рис. 42.15), объём которой равен $\frac{1}{3}$.

Задача 16. Объём треугольной пирамиды $SABC$ равен 1, D – середина ребра AB, E – середина ребра SC. Найдите объём общей части двух пирамид $EABC$ и $SBCD$.

Решение. Общей частью двух пирамид $EABC$ и $SBCD$ является треугольная пирамида $EBCD$ (рис. 42.16), объём которой равен $\frac{1}{4}$.

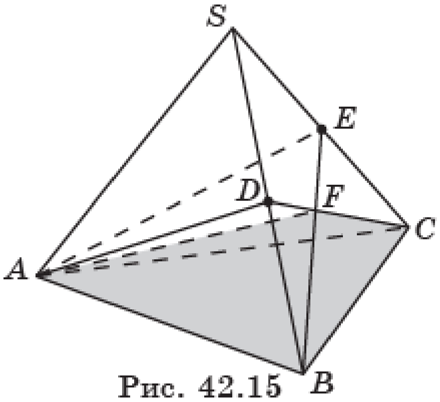

Рис. 42.15

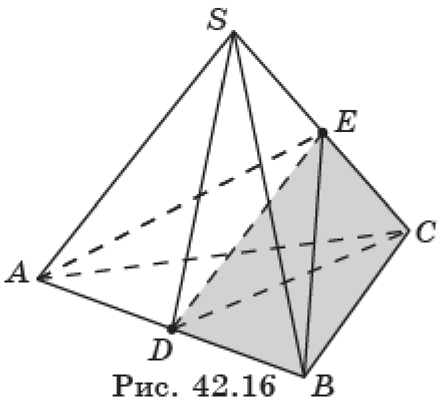

Рис. 42.16

Задача 17. Найдите объём общей части двух пирамид A_1ABC и B_1ABC, содержащихся в правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, объём которой равен 1.

Решение. Общей частью двух пирамид A_1ABC и B_1ABC является треугольная пирамида $OABC$ (рис. 42.17), объём которой равен $\frac{1}{6}$.

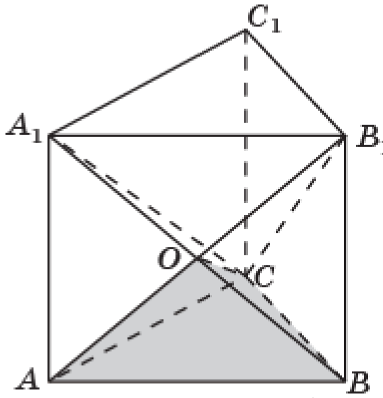

Рис. 42.17

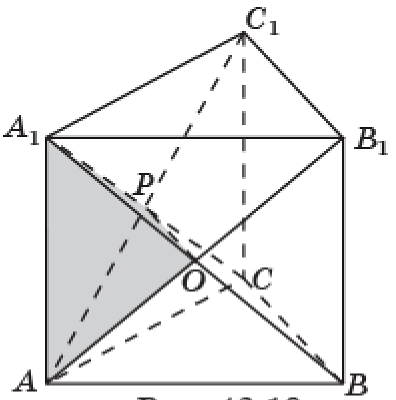

Рис. 42.18

Задача 18. Найдите объём общей части двух пирамид A_1ABC и $AA_1B_1C_1$, содержащихся в правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, объём которой равен 1.

Решение. Общей частью двух пирамид A_1ABC и $AA_1B_1C_1$ является треугольная пирамида $POAA_1$ (рис. 42.18), объём которой равен $\frac{1}{12}$.

Задача 19. Найдите объём общей части двух пирамид B_1ABC и A_1ABF, содержащихся в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, объём которой равен 1.

Решение. Общей частью двух пирамид B_1ABC и A_1ABF является треугольная пирамида $SOAB$ (рис. 42.19), объём которой равен $\frac{1}{108}$.

Задача 20. Найдите объём общей части двух многогранников $BCDEC_1D_1$ и $CDEFD_1E_1$, содержащихся в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, объём которой равен 1.

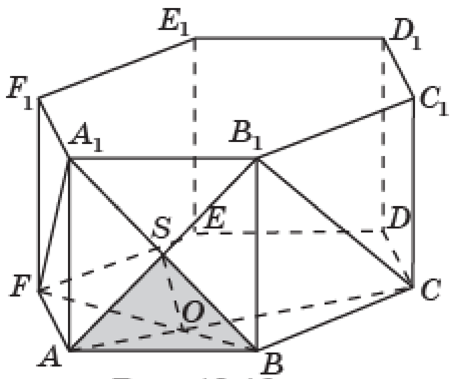

Рис. 42.19

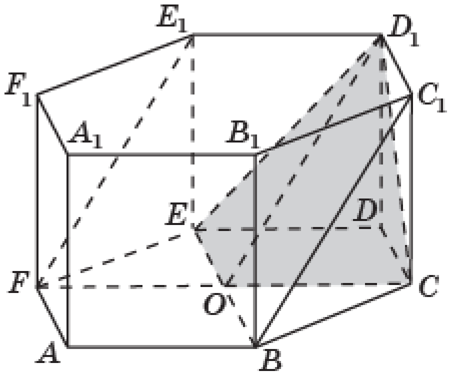

Рис. 42.20

Решение. Общей частью двух многогранников $BCDEC_1D_1$ и $CDEFD_1E_1$ является четырёхугольная пирамида D_1OCDE (рис. 42.20), объём которой равен $\frac{1}{9}$.

По аналогии с предложенными задачами можно придумывать и свои задачи. Их можно использовать для индивидуальных заданий учащихся, при проведении предметных курсов по выбору, подготовке к олимпиадам и Единому государственному экзамену по математике.