И.М. Смирнова, *В.А. Смирнов*

Измерение многогранных углов[1]

Рассмотрим вопрос об измерении многогранных углов. Поскольку градусная величина развёрнутого двугранного угла измеряется градусной величиной соответствующего линейного угла и равна 180°, то будем считать, что градусная величина всего пространства, которое состоит из двух развёрнутых двугранных углов, равна 360°. Величина многогранного угла, выраженная в градусах, показывает, какую часть пространства занимает данный многогранный угол. Например, трёхгранный угол куба (рис. 38.1) занимает одну восьмую часть пространства, значит, его градусная величина равна $\frac{1}{8}360° = 45°$.

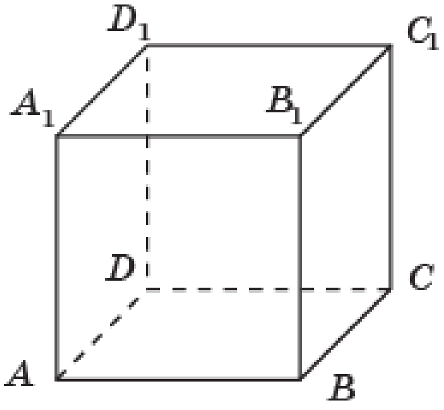

Рис. 38.1

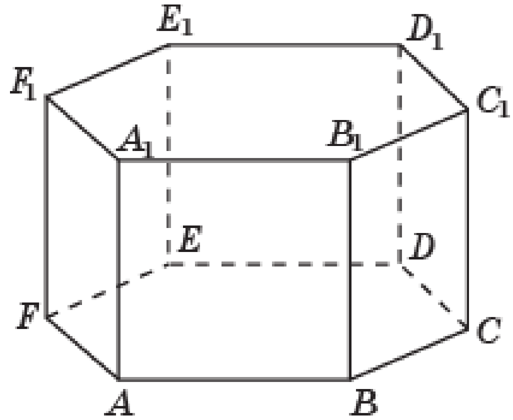

Рис. 38.2

Трёхгранный угол в правильной n-угольной призме равен половине двугранного угла при боковом ребре. Учитывая, что этот двугранный угол равен $\frac{180°(n-2)}{n}$, получаем, что трёхгранный угол призмы равен $\frac{180°(n-2)}{n}$. На рисунке 38.2 изображена правильная шестиугольная призма, трёхгранные углы которой равны 60°.

Напомним, что для выпуклого n-угольника имеет место следующая формула для суммы его углов

$$\Sigma_n = 180°(n-2).$$

Здесь мы получим пространственный аналог этой формулы для выпуклых многогранных углов.

Начнём с трёхгранного угла. Опишем около его вершины S единичную сферу и обозначим точки пересечения рёбер трёхгранного угла с этой сферой *A, B, C* (рис. 38.3).

[1] Математика. – 2007. – № 5. – С. 30-34.

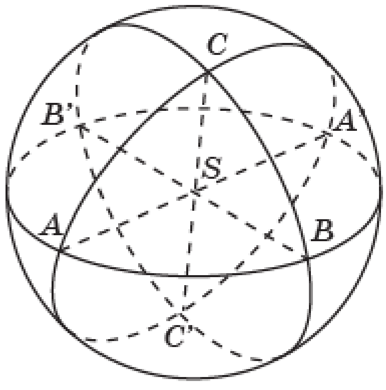

Рис. 38.3

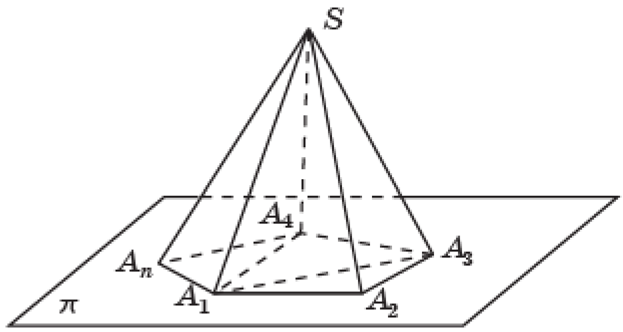

Рис. 38.4

Плоскости граней трёхгранного угла разбивают эту сферу на шесть попарно равных сферических двуугольников, соответствующих двугранным углам данного трёхгранного угла. Сферический треугольник ABC и симметричный ему сферический треугольник $A'B'C'$ являются пересечением трёх двуугольников. Поэтому удвоенная сумма двугранных углов равна 360° плюс учетверённая величина трёхгранного угла, или

$$(1) \qquad \angle SA + \angle SB + \angle SC = 180° + 2\angle SABC.$$

Пусть теперь $SA_1...A_n$ – выпуклый n-гранный угол (рис. 38.4).

Разбивая его на трёхгранные углы проведением диагоналей A_1A_3, ..., A_1A_{n-1} и применяя к ним полученную формулу, будем иметь

$$(2) \qquad \angle SA_1 + \cdots + \angle SA_n = 180°(n-2) + 2\angle SA_1 \ldots A_n.$$

Найдём двугранные и многогранные углы ромбододекаэдра – многогранника, гранями которого являются двенадцать ромбов (рис. 38.5).

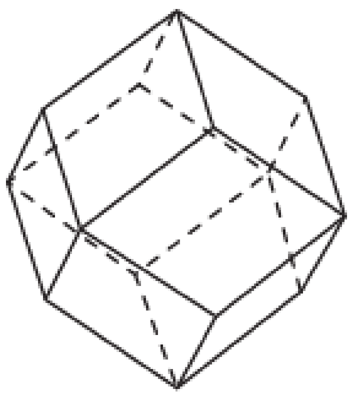
Рис. 38.5

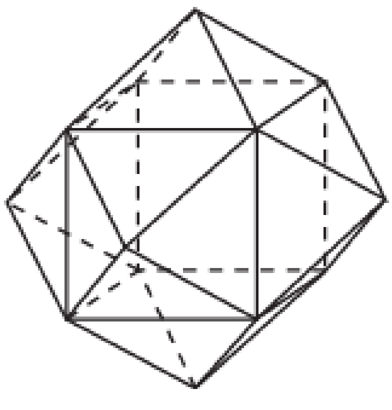
Рис. 38.6

Воспользуемся тем, что ромбододекаэдр может быть получен из двух равных кубов. А именно, разобьём один из двух кубов на правильные четырёхугольные пирамиды, основаниями которых служат грани куба, а вершинами – центр куба. Поставим эти пирамиды основаниями на грани другого куба (рис. 38.6). Получим ромбододекаэдр.

Из этого построения, в частности, следует, что равными ромбододекаэдрами можно заполнить все пространство (составить пространственный паркет). Для этого сначала заполним пространство равными кубами, закрашенными в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Затем белые кубы разобьем на правильные четырёхугольные пирамиды и присоединим их к чёрным кубам. Получим искомое заполнение пространства ромбододекаэдрами. При этом в каждой вершине сходится или шесть равных четырёхгранных углов, или четыре равных трёхгранных углов ромбододекаэдров.

Таким образом, величина четырёхгранного угла ромбододекаэдра равна 60°, а величина трёхгранного угла ромбододекаэдра равна 90°.

Двугранные углы ромбододекаэдра находятся из приведённой выше формулы и равны 120°.

Используя теорему Эйлера о числе вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника (В – Р + Г = 2), выведем формулу, связывающую суммы двугранных и многогранных углов выпуклого многогранника.

Пусть n_1, ..., $n_{\text{в}}$ - количества рёбер, сходящихся в вершинах данного многогранника. Тогда, суммируя соответствующие равенства по всем вершинам многогранника и учитывая, что при этом каждый двугранный угол считается дважды, получим равенство

$$2\Sigma_2 = 180°(n_1 - 2) + \cdots + 180°(n_{\text{в}} - 2) + 2\Sigma,$$

где Σ_2, Σ - суммы соответственно двугранных и многогранных углов данного многогранника.

Заметим, что $n_1 + ... + n_{\text{в}} = 2\text{Р}$. Следовательно, будем иметь равенство

$$\Sigma_2 = 180°(\text{Р} - \text{В}) + \Sigma,$$

или, окончательно, используя соотношение Эйлера, В – Р + Г = 2, получаем

$$\Sigma_2 = 180°(\Gamma - 2) + \Sigma.$$

Многогранные углы можно измерять и числами. Действительно, трёмстам шестидесяти градусам всего пространства соответствует число 2π, равное половине площади единичной сферы. Поэтому численной величиной многогранного угла считают половину площади сферического многоугольника, высекаемого многогранным углом из единичной сферы с центром в вершине данного многогранного угла.

Например, численная величина трёхгранного угла куба будет равна $\frac{\pi}{4}$.

Переходя от градусов к числам в формулах 1 и 2, связывающих двугранные углы трехгранного и многогранного углов, будем иметь

$$(3) \qquad \angle SA + \angle SB + \angle SC = \pi + 2\angle SABC.$$

$$(4) \qquad \angle SA_1 + \cdots + \angle SA_n = \pi(n - 2) + 2\angle SA_1 \dots A_n.$$

Заменяя в этих формулах величины трёхгранного и многогранного углов на площади сферических треугольника и многоугольника, соответственно, получим формулы для площадей сферического треугольника ABC и многоугольника $A_1 \dots A_n$.

$$(5) \qquad S(ABC) = \angle SA + \angle SB + \angle SC - \pi.$$

$$(6) \qquad S(A_1 \dots A_n) = \angle SA_1 + \cdots + \angle SA_n - \pi(n - 2)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Чему равен трёхгранный угол, образованный диагоналями граней куба, выходящими из одной вершины?

2. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка O – центр описанной сферы. Найдите трёхгранный угол $OABC$ и двугранные углы OA, OB, OC.

3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 1, сторона основания $\sqrt{2}$. Найдите трёхгранный угол при вершине и двугранные углы при боковых рёбрах этой пирамиды.

4. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 1, высота – $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Найдите трёхгранный угол при вершине и двугранные углы при боковых рёбрах этой пирамиды.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания и боковое ребро равны 1. Чему равны двугранные и трёхгранные углы при основании?

6. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 2 см, высота – 1 см. Чему равен многогранный угол при вершине этой пирамиды?

7. В правильной пятиугольной пирамиде сторона основания и боковое ребро равны 1. Чему равен пятигранный угол при вершине этой пирамиды?

8. Найдите многогранные углы правильных многогранников.

9. Верна ли формула (2) для невыпуклых многогранных углов? Почему?

10. Найдите площадь части сферы с центром в вершине единичного куба и радиусом 1, заключённой внутри этого куба.

11. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 2 см, высота – 1 см. Найдите площадь части сферы с центром в вершине пирамиды и радиусом 1 см, заключённой внутри пирамиды.

12. Чему равна площадь сферического треугольника на единичной сфере, все углы которого равны: а) 80°; б) 90°; в) 100°?