И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Задачи на нахождение кратчайших путей относятся к экстремальным задачам и играют большую роль в математике и ее приложениях.

Такие задачи часто встречаются и на различных олимпиадах по математике. Например, на Объединенной межвузовской математической олимпиаде 2011 года учащимся 11 класса была предложена следующая задача.

На рисунке 1 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?

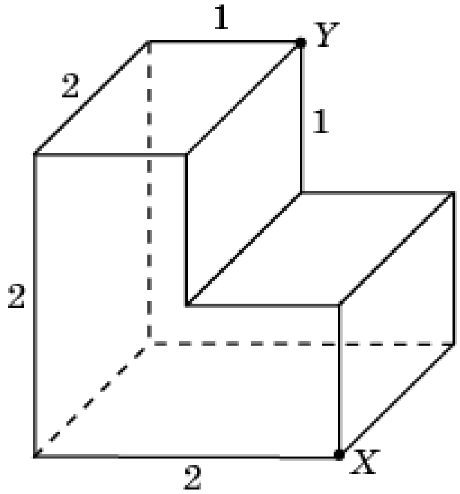

Рис. 1

Здесь мы рассмотрим примеры таких задач и метод их решения, основанный на использовании разверток.

Задача 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2), соединяющего вершины A и C_1.

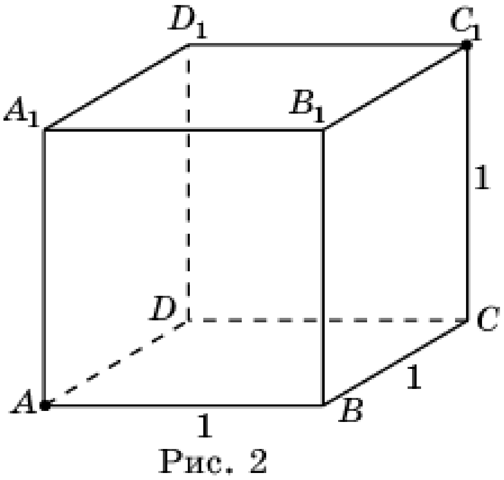

Рис. 2

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней куба, изображенную на рисунке 3.

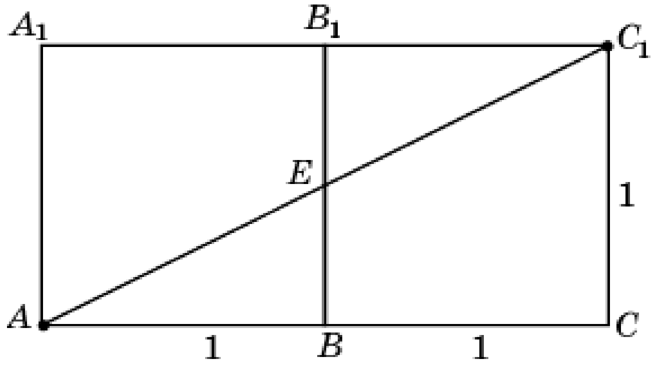

Рис. 3

Кратчайшим путем из A в C_1 является отрезок AC_1, длина которого равна $\sqrt{5}$. Соответствующий путь на поверхности куба изображен на рисунке 4.

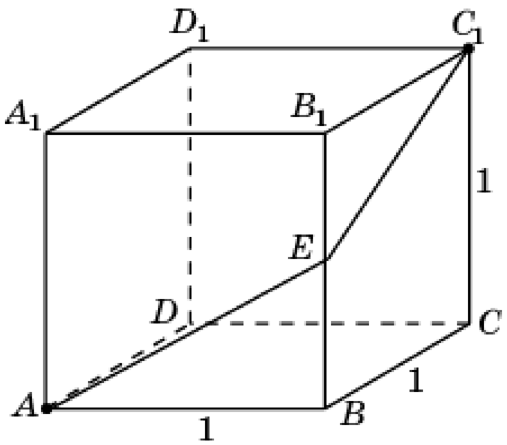

Рис. 4

Ответ. $\sqrt{5}$.

Заметим, что путь из A в C_1 является не единственным. Имеется шесть таких путей, длины которых равны $\sqrt{5}$, проходящих через середины ребер BB_1, A_1B_1, A_1D_1, DD_1, CD и BC (рис. 5).

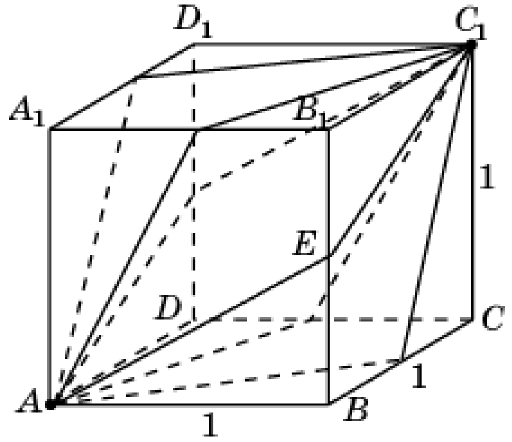

Рис. 5

Задача 2. Три ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6) равны 5, 4, 3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого параллелепипеда, соединяющего вершины A и C_1.

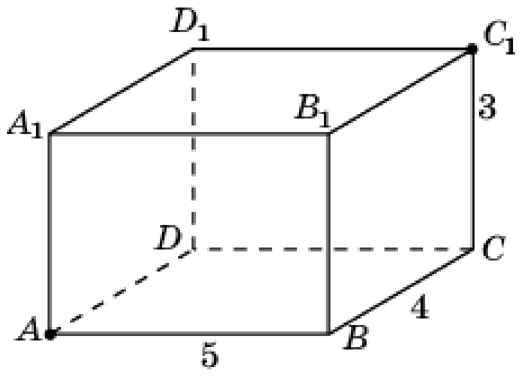

Рис. 6

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней данного параллелепипеда, изображенную на рисунке 7.

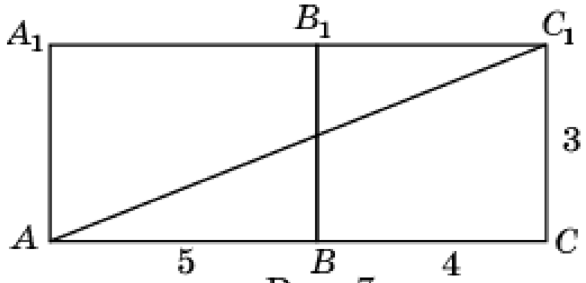

Рис. 7

Кратчайшим путем из A в C_1 является отрезок AC_1, длина которого равна $3\sqrt{10}$. Соответствующий путь на поверхности куба изображен на рисунке 8.

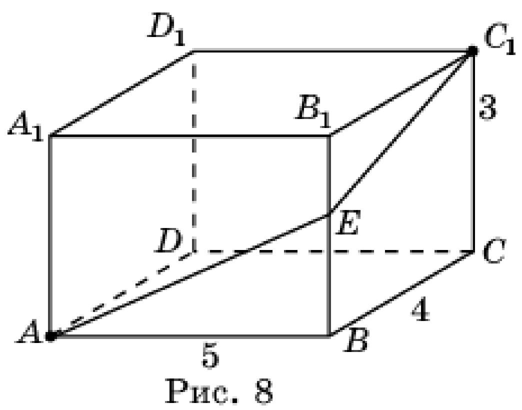

Рис. 8

Однако этот путь не является кратчайшим. Рассмотрим другие возможные развертки граней данного параллелепипеда (рис. 9).

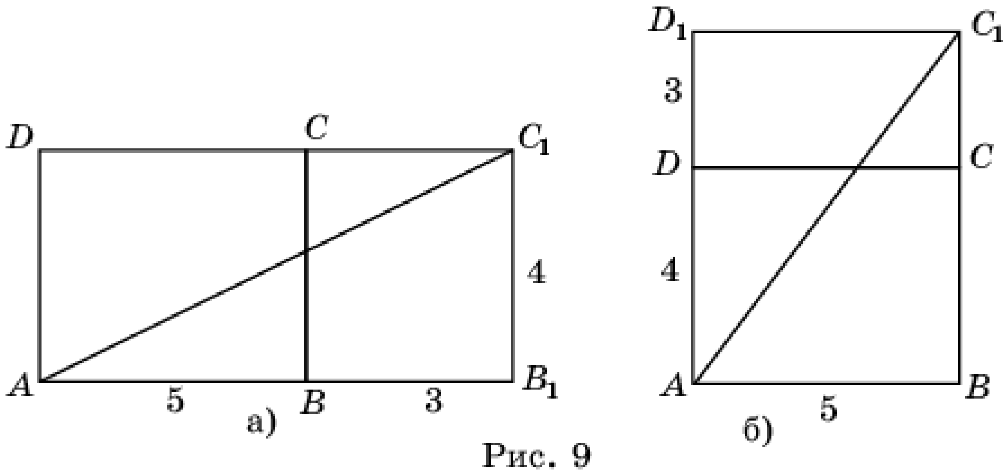

Рис. 9

Длины соответствующих путей равны $4\sqrt{5}$ и $\sqrt{74}$. Наименьшая длина равна $\sqrt{74}$. Соответствующий путь на поверхности данного параллелепипеда изображен на рисунке 10.

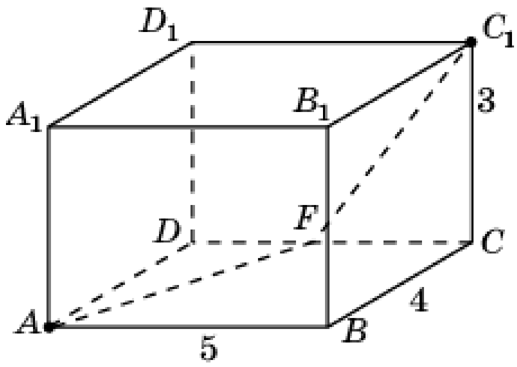

Рис. 10

Ответ. $\sqrt{74}$.

Задача 3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра *ABCD* (рис. 11), соединяющего середины ребер *AB* и *CD*.

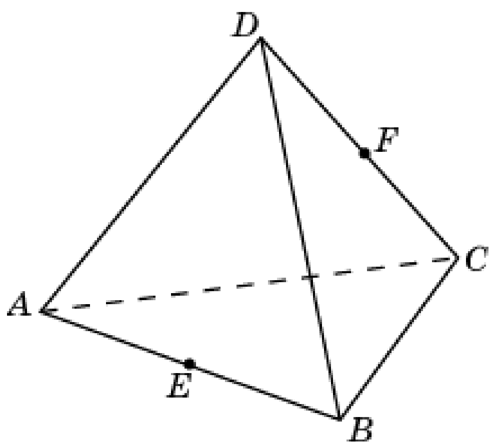

Рис. 11

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра, изображенную на рисунке 12.

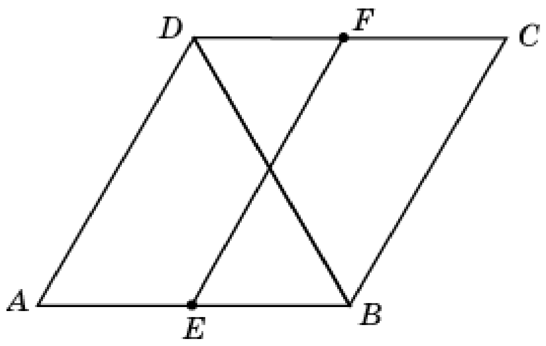

Рис. 12

Кратчайшим путем из E в F является отрезок EF, длина которого равна 1. Соответствующий путь на поверхности правильного тетраэдра изображен на рисунке 13.

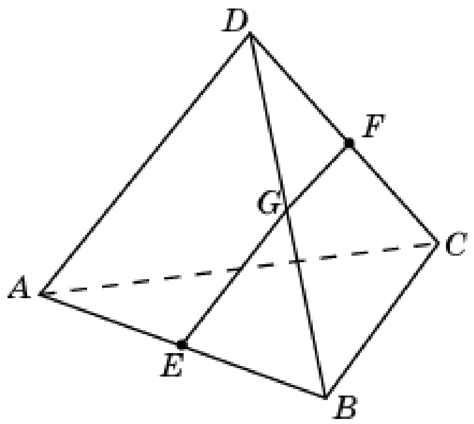

Рис. 13

Ответ. 1.

Задача 4. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 14), соединяющего точки E и F, расположенные на высотах боковых граней в 7 см от соответствующих вершин тетраэдра. Ребро тетраэдра равно 20 см.

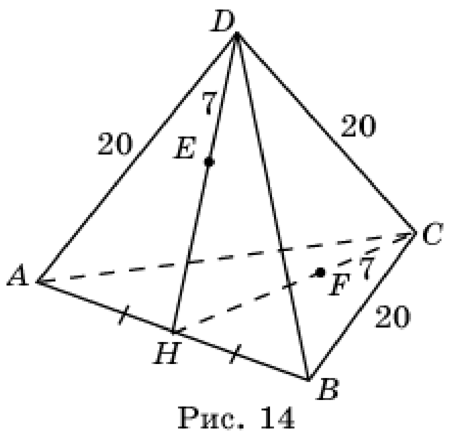

Рис. 14

Решение. Одним из возможных путей является путь EHF. Его длина равна $20\sqrt{3} - 14$ см. Для нахождения другого пути рассмотрим развертку, состоящую из трех граней тетраэдра, изображенную на рисунке 15.

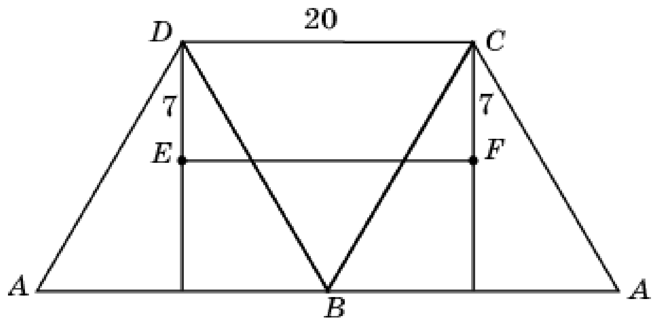

Рис. 15

Длина пути EF равна 20 см. Легко видеть, что $20 < 20\sqrt{3} - 14$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности правильного тетраэдра изображен на рисунке 16.

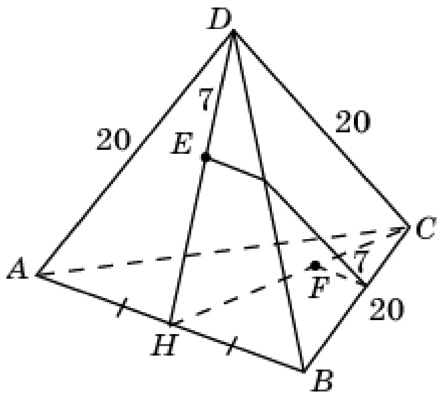

Рис. 16

Ответ. 20 см.

Задача 5. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 17), соединяющего вершину A и середину D ребра B_1C_1. Все ребра призмы равны 1.

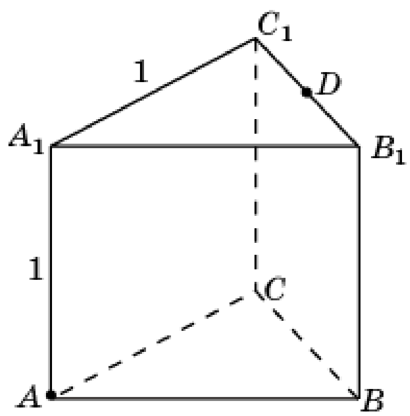

Рис. 17

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух боковых граней призмы, изображенную на рисунке 18.

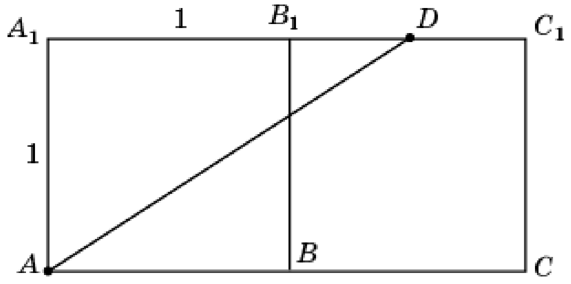

Рис. 18

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка AD и равна $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Однако путь из A в D может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развертка изображена на рисунке 19.

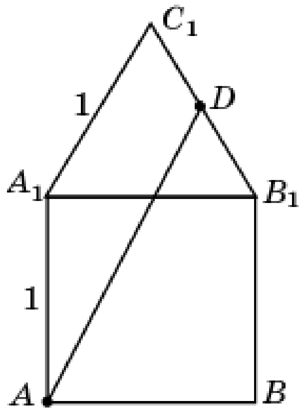

Рис. 19

В этом случае кратчайшим путем является отрезок AD, длина которого равна $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображен на рисунке 20.

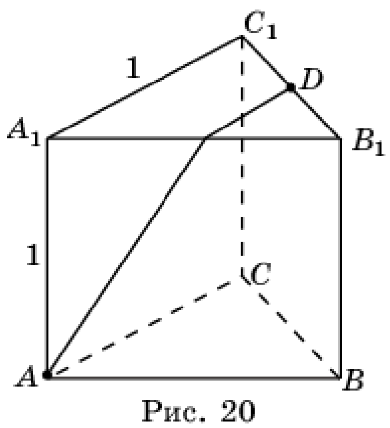

Рис. 20

Ответ. $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$.

Задача 6. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 21), соединяющего вершины A и D_1. Все ребра призмы равны 1.

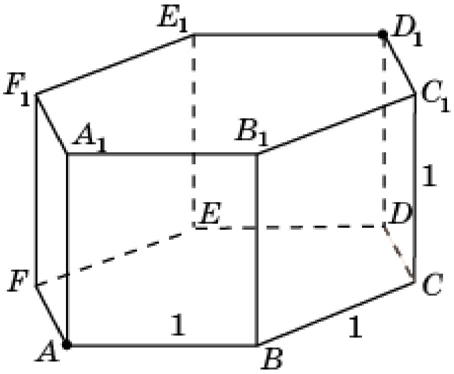

Рис. 21

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из трех боковых граней призмы, изображенную на рисунке 22.

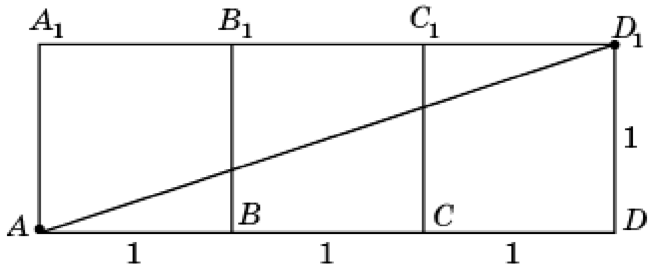

Рис. 22

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка AD_1 и равна $\sqrt{10}$. Однако путь из A в D_1 может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развертка изображена на рисунке 23.

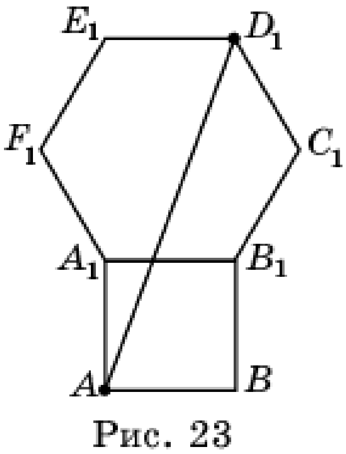

Рис. 23

В этом случае кратчайшим путем является отрезок AD_1, длина которого равна $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\sqrt{5+2\sqrt{3}} < \sqrt{10}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображен на рисунке 24.

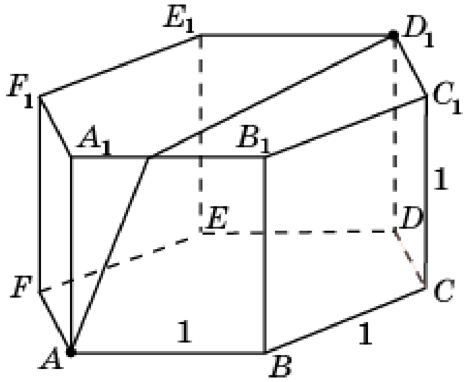

Рис. 24

Ответ. $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Рассмотрим теперь задачу, предложенную на Объединенной межвузовской математической олимпиаде 2011 года учащимся 11 класса, формулировку которой мы привели в начале данной статьи.

Задача 7. На рисунке 25 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины B и C_2.

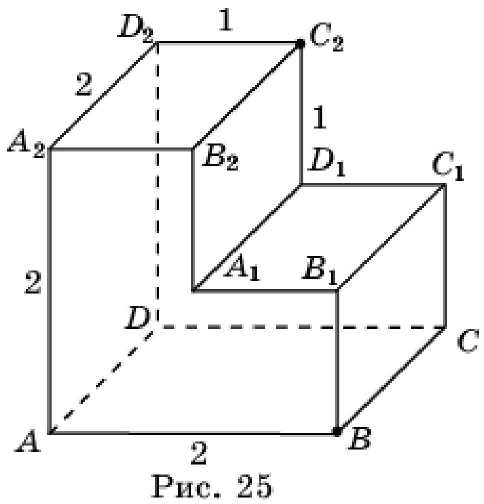

Рис. 25

Решение. Рассмотрим развертку трех граней этого многогранника, изображенную на рисунке 26.

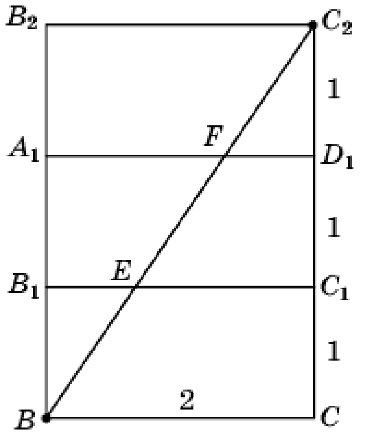

Рис. 26

Кратчайшим путем из точки B в точку C_2 является отрезок BC_2, длина которого равна $\sqrt{13}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 27.

Ответ. $\sqrt{13}$.

Задача 8. На рисунке 28 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности

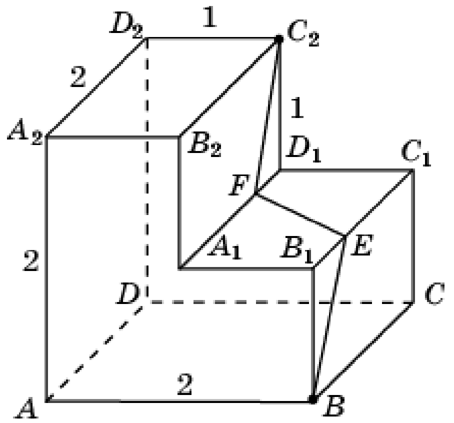

Рис. 27

этого многогранника, соединяющего вершины A и C_2.

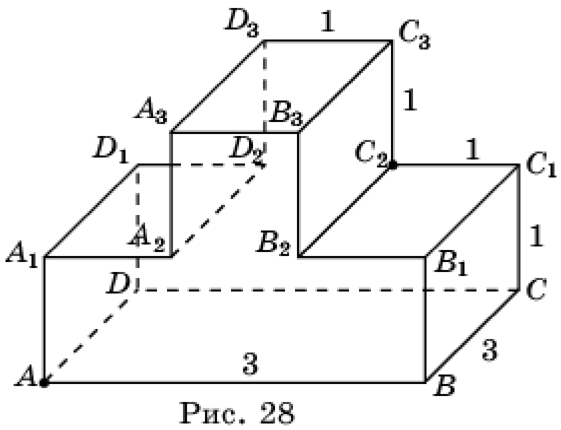

Рис. 28

Решение. Рассмотрим развертку двух граней этого многогранника, изображенную на рисунке 29.

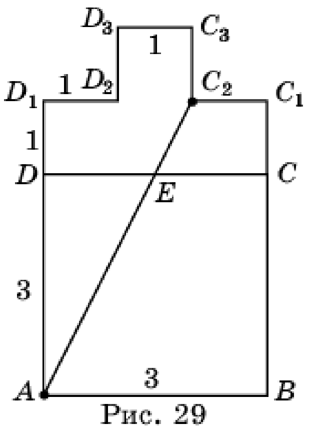

Рис. 29

Кратчайшим путем из точки A в точку C_2 является отрезок AC_2, длина которого равна $2\sqrt{5}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 30.

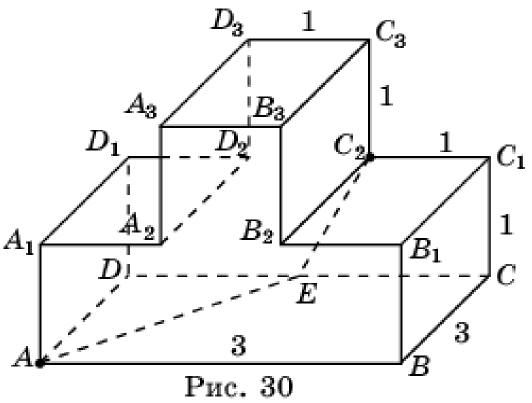

Рис. 30

Ответ. $2\sqrt{5}$.

Задача 9. На рисунке 31 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины B и G_1.

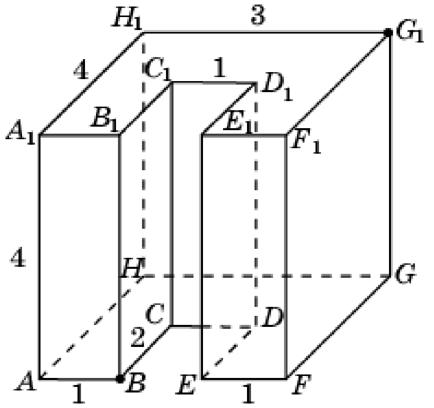

Рис. 31

Решение. Рассмотрим развертку, изображенную на рисунке 32, состоящую из двух боковых граней и части верхней грани этого многогранника.

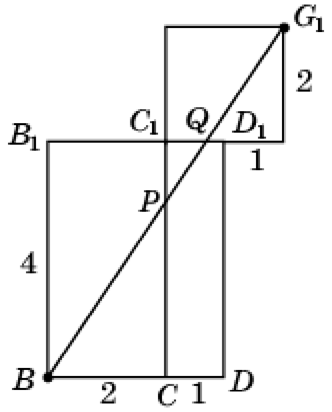

Рис. 32

Кратчайшим путем из точки B в точку G_1 является отрезок BG_1, длина которого равна $2\sqrt{13}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 33.

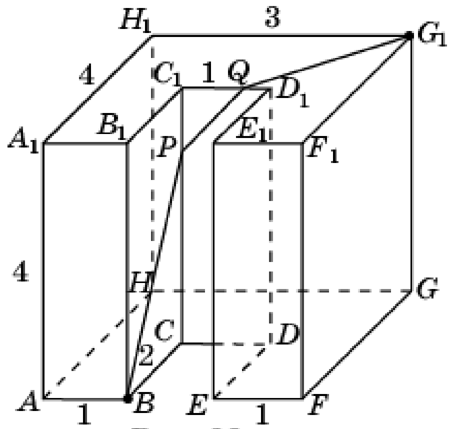

Рис. 33

Ответ. $2\sqrt{13}$.

Рассмотрим теперь задачи на нахождение кратчайших путей на поверхностях круглых тел.

Задача 10. Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого цилиндра, соединяющего центрально-симметричные точки A и B (рис. 34).

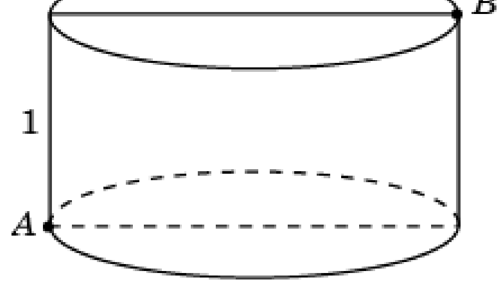

Рис. 34

Решение. Разверткой боковой поверхности этого цилиндра является прямоугольник со сторонами 2π и 1, изображенный на рисунке 35.

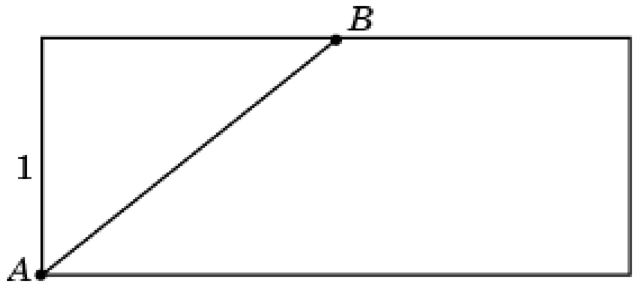

Рис. 35

Кратчайшим путем из точки A в точку B является отрезок AB, длина которого равна $\sqrt{1+\pi^2}$. Соответствующий путь на поверхности цилиндра изображен на рисунке 36.

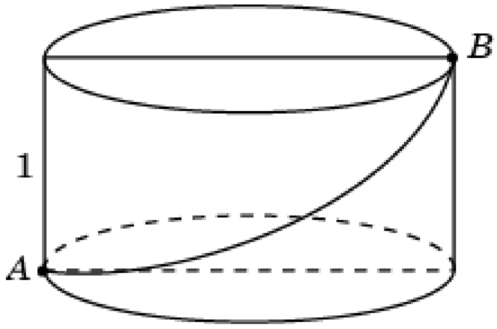

Рис. 36

Ответ. $\sqrt{1+\pi^2}$.

Задача 11. На внутренней стенке цилиндрической банки в трех сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке сидит муха (рис. 37). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до меда. Радиус основания банки равен 10 см.

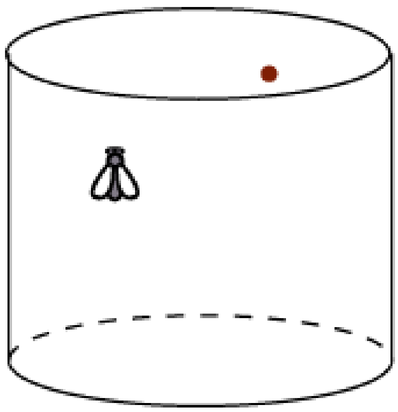
Рис. 37

Решение. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник (рис. 38).

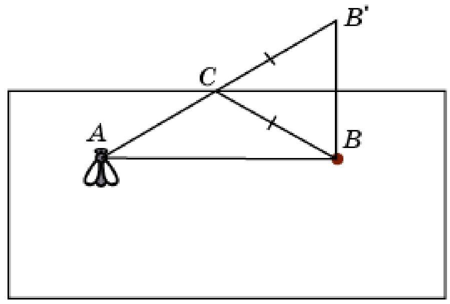

Рис. 38

Конечно, кратчайшим путем между точками A и B является отрезок AB. Однако, чтобы муха могла попасть на внутреннюю сторону банки, ей нужно переползти через край в некоторой точке C. Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно стороны прямоугольника. Тогда отрезки BC и $B'C$ равны, следовательно, длина кратчайшего пути равна длине отрезка AB'. Она равна $2\sqrt{25\pi^2+9}$. Соответствующий путь на поверхности банки изображен на рисунке 39.

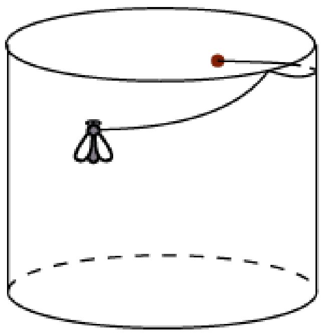
Рис. 39

Ответ. $2\sqrt{25\pi^2+9}$.

Задача 12. Осевое сечение конуса – правильный треугольник ABC со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки A в точку D – середину стороны BC (рис. 40).

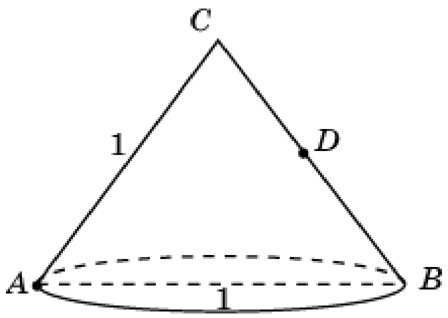

Рис. 40

Решение. Разверткой боковой поверхности этого конуса является полукруг радиуса 1 (рис. 41).

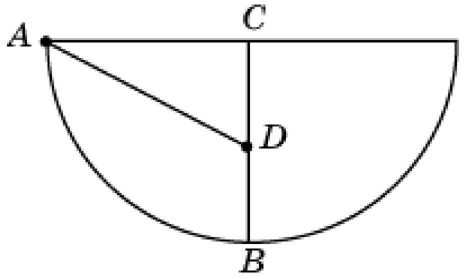

Рис. 41

Кратчайшим путем из точки A в точку D является отрезок AD, длина которого равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Соответствующий путь на поверхности конуса изображен на рисунке 42.

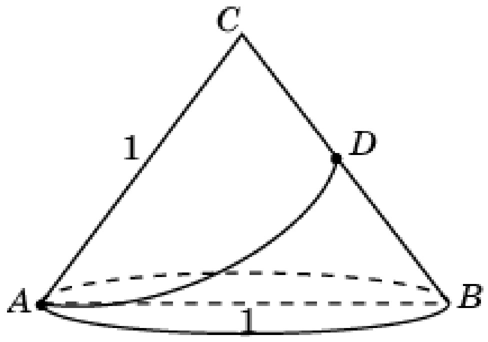

Рис. 42

Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Метод нахождения кратчайших путей на сфере отличается от рассмотренного, поскольку сферу или ее часть нельзя развернуть на плоскость. Ознакомиться с ним можно в учебнике:

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия 10-11 классы: учебн. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2011.