И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Из школьного курса геометрии хорошо известен признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними, а именно:

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 1).

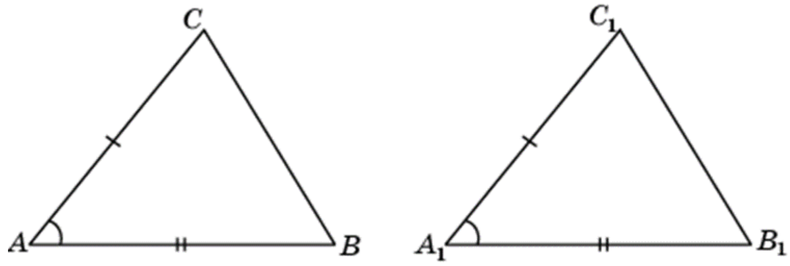

Рис. 1

Естественно, поставить вопрос о том, будут ли равны треугольники, если соответствующие равные углы в треугольниках не заключены между равными сторонами. Верно ли, что если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Оказывается, это неверно. Приведем пример. Рассмотрим окружность и ее хорду AB (рис. 2). С центром в точке A проведем другую окружность, пересекающую первую окружность в некоторых точках C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 AB – общая сторона, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

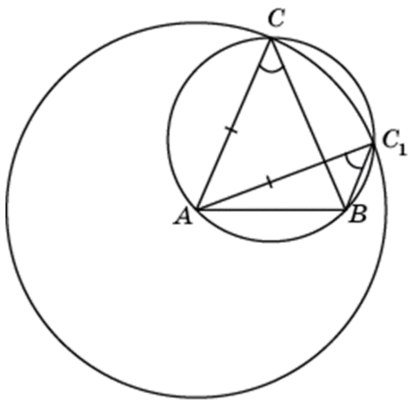

Рис. 2

В формулировки признаков равенства треугольников можно включать не только стороны и углы, но и другие элементы треугольников. Рассмотрим несколько формулировок признаков равенства треугольников по трем элементам, включающим стороны, углы, высоты, биссектрисы и медианы треугольников. Выясним справедливость соответствующих признаков.

1. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, одного треугольника соответственно

равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1 (рис. 3). Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

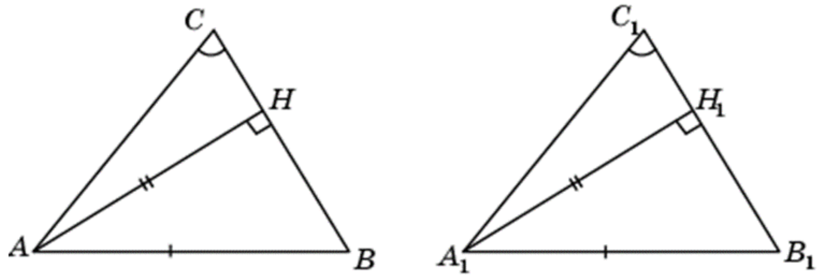

Рис. 3

Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Учитывая, что $\angle C = \angle C_1$, имеем равенство $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

2. Пусть угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, прилежащую к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника (рис. 4).

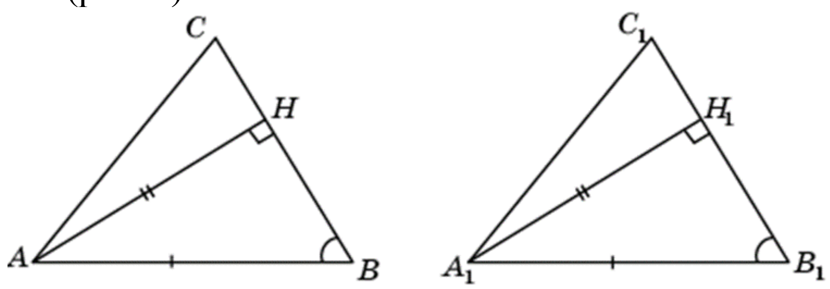

Рис. 4

Приведем пример, показывающий, что равенство указанных элементов треугольников недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ ($\angle H = \angle H_1 = 90^o$), в которых, $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AH = A_1H_1$ (рис. 5).

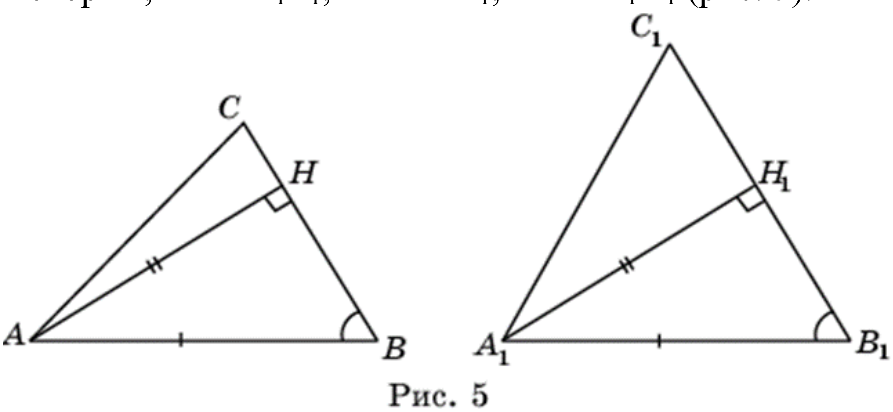

Рис. 5

На продолжениях сторон BH и B_1H_1 отложим неравные отрезки HC и H_1C_1. Тогда в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, высоты AH и A_1H_1 равны, однако сами треугольники не равны.

3. Если две стороны и медиана, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1 (рис. 6).

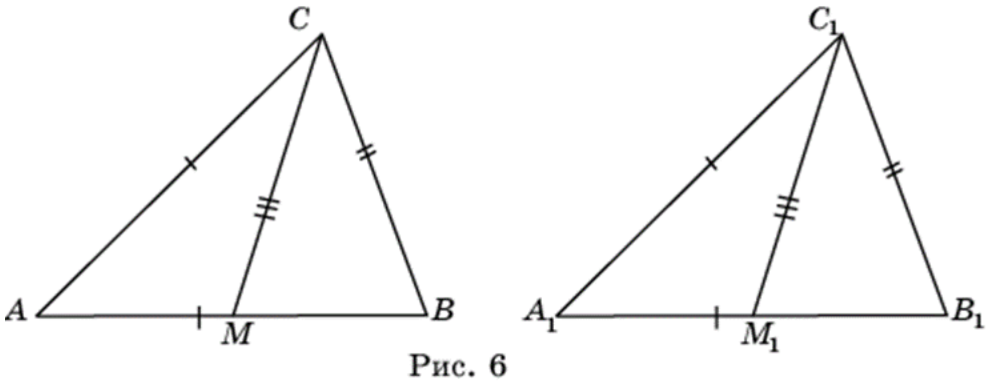

Рис. 6

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Продолжим медианы и отложим отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$ (рис. 7).

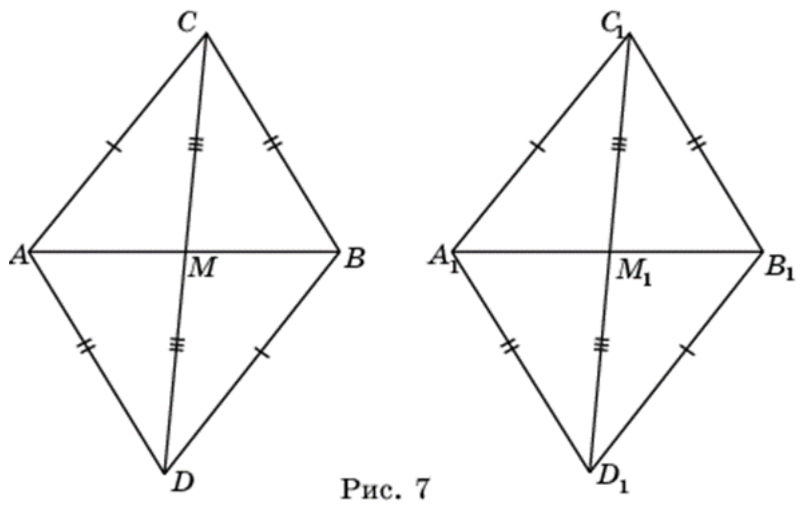

Рис. 7

Четырехугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ – параллелограммы. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Аналогично, треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Значит, $\angle C = \angle C_1$ и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

4. Пусть угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника (рис. 8).

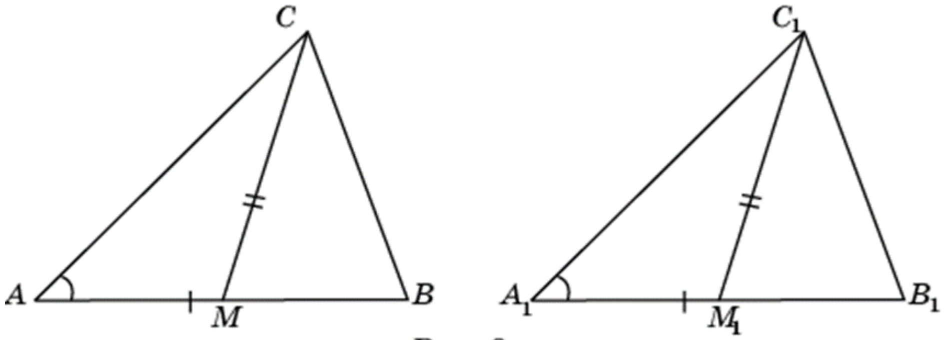

Рис. 8

Приведем пример, показывающий, что равенство указанных элементов недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим окружность с центром в точке M (рис. 9).

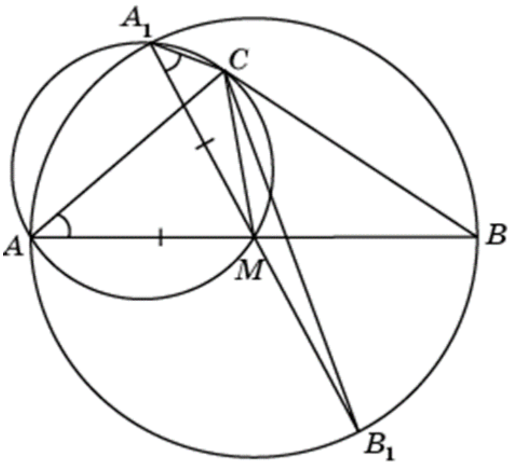

Рис. 9

Проведем два диаметра AB и A_1B_1. Через точки A, A_1, M проведем еще одну окружность и выберем на ней точку C, как показано на рисунке. В треугольниках ABC и A_1B_1C $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, медиана CM – общая. Однако треугольники ABC и A_1B_1C не равны.

5. Если сторона и две медианы, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1, медиана BK равна медиане B_1K_1 (рис. 10).

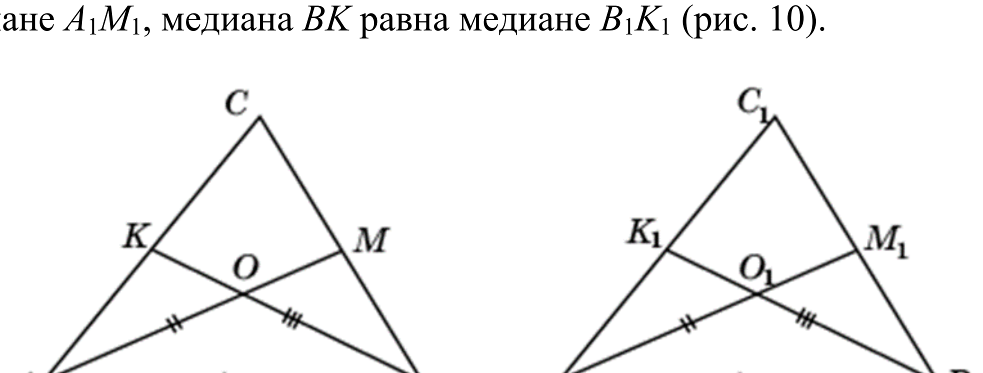

Рис. 10

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, точки O и O_1 пересечения медиан данных треугольников делят медианы в отношении 2:1, считая от вершины. Значит, треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BAO = \angle B_1A_1O_1$ и, значит, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

6. Пусть угол и две медианы, проведенные к его сторонам, одного треугольника соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника (рис. 11).

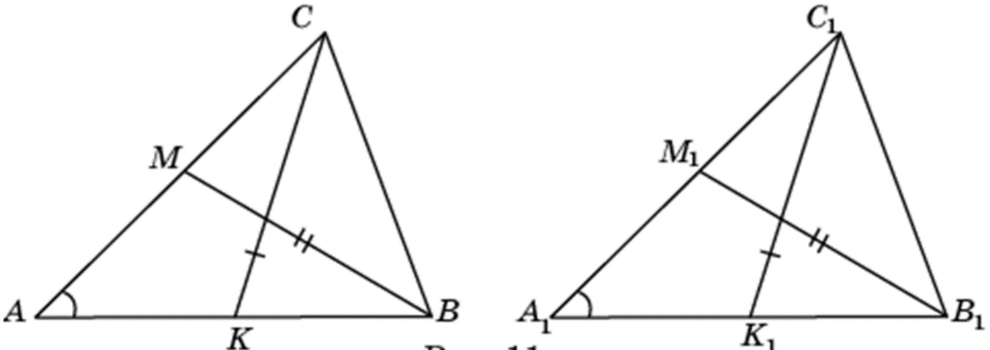

Рис. 11

Приведем пример, показывающий, что равенство указанных элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке M (рис. 12).

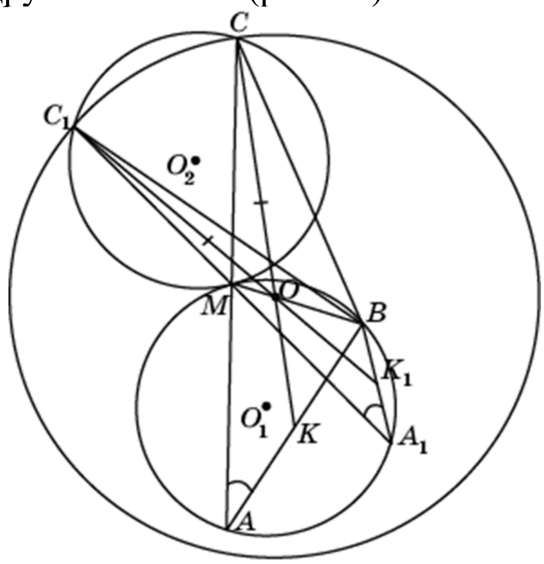

Рис. 12

Проведем в одной из них хорду AB и прямую AM, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведем отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведем в нем медиану CK и обозначим O точку, делящую ее в отношении 2:1, считая от вершины C. Проведем окружность с центром в точке O, радиуса OC, пересекающую вторую окружность в точке C_1. Проведем прямую C_1M и обозначим A_1 ее точку пересечения с первой окружностью. Обозначим K_1 точку пересечения хорды A_1B и прямой C_1O. В треугольниках ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы CK и C_1K_1 равны, медиана BM – общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

7. Ели две стороны и биссектриса, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1 (рис. 13).

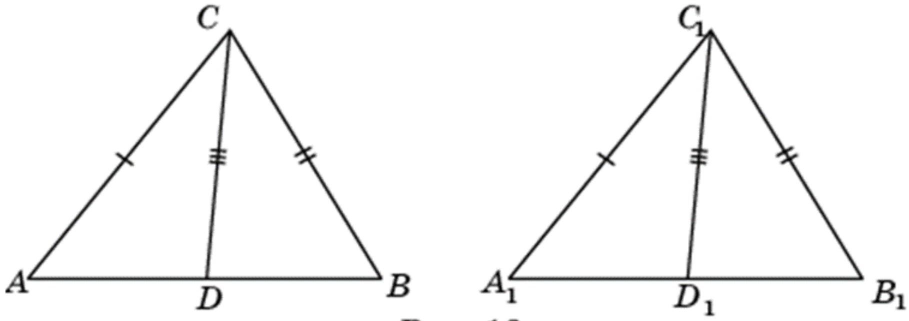

Рис. 13

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Продолжим стороны AC и A_1C_1 и отложим на их продолжениях отрезки $CE = BC$ и $C_1E_1 = B_1C_1$ (рис. 14).

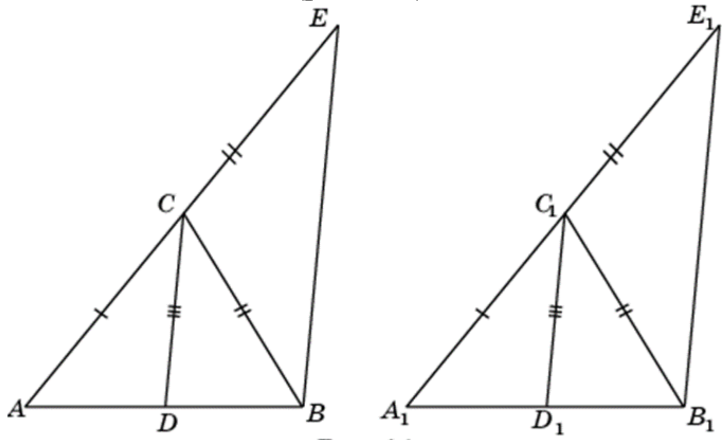

Рис. 14

Тогда $BE = CD\frac{AE}{AC}$, $B_1E_1 = C_1D_1\frac{A_1E_1}{A_1C_1}$. Треугольники BCE и $B_1C_1E_1$ равны по трем сторонам. Значит, $\angle E = \angle E_1$ и $BE = B_1E_1$. Треугольники ABE и $A_1B_1E_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

8. Пусть угол, сторона, прилежащая к этому углу и биссектриса, проведенная к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника (рис. 15).

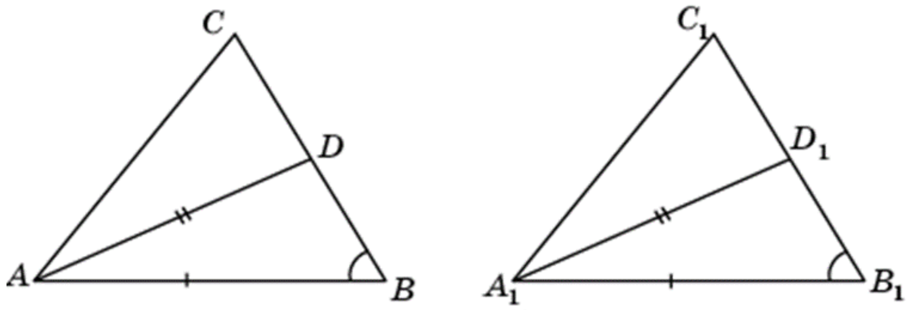

Рис. 15

Пример треугольников ABC и ABC_1, изображенных на рисунке 16, показывает, что равенство указанных элементов недостаточно для равенства самих треугольников.

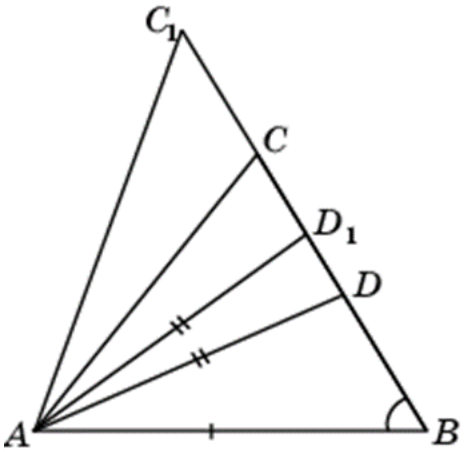

Рис. 16

Действительно, в треугольниках ABC и ABC_1 $\angle B$ – общий, AB – общая сторона, биссектрисы AD и AD_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

9. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны (рис. 17).

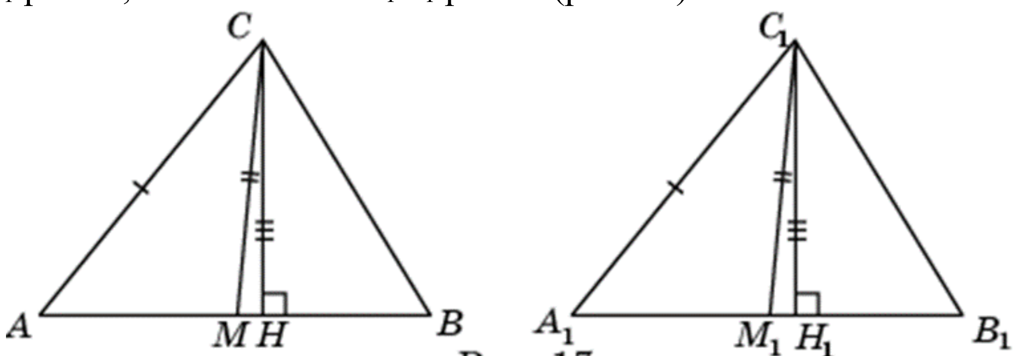

Рис. 17

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$ и $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $MH = M_1H_1$, откуда $AM = A_1M_1$ и, значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

10. Пусть сторона, медиана и высота, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника (рис. 18).

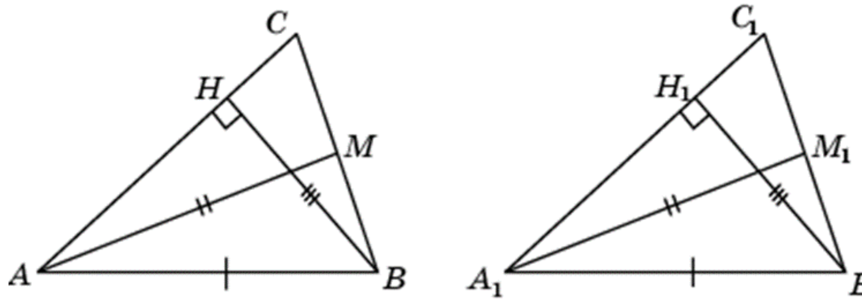

Рис. 18

Приведем пример, показывающий, что равенство указанных элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим окружность и угол с вершиной в центре A этой окружности (рис. 19).

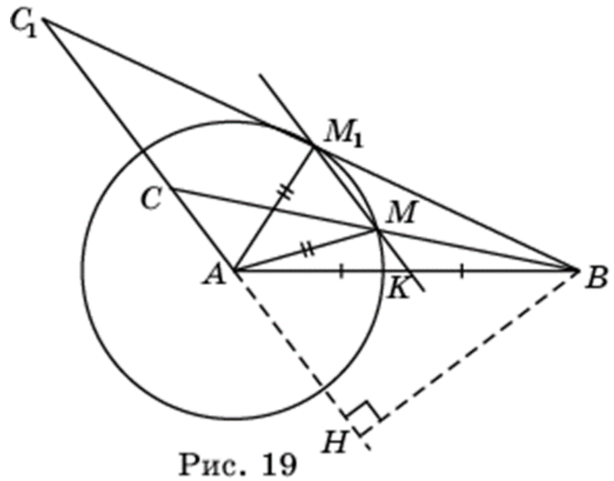

Рис. 19

Отложим на его стороне отрезок AB, больший диаметра, и через его середину K проведем прямую, параллельную другой стороне угла и пересекающую окружность в некоторых точках M и M_1. Проведем прямые BM, BM_1 и точки их пересечения со стороной угла обозначим соответственно C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB – общая, высота BH – общая, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

11. Два треугольника равны, если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны медианы AK и A_1K_1, BL и B_1L_1, CM и C_1M_1 (рис. 20).

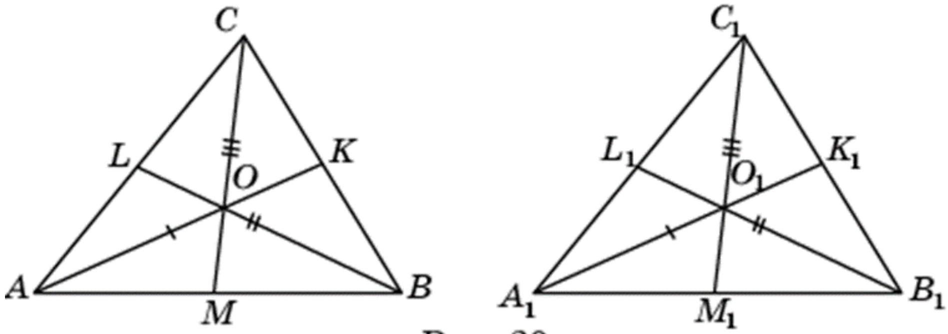

Рис. 20

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Пусть O и O_1 – точки пересечения медиан данных треугольников. Заметим, что медианы OM и O_1M_1 треугольников ABO и $A_1B_1O_1$ равны, так как они составляют одну третью часть соответствующих медиан данных треугольников.

По признаку равенства треугольников, доказанному нами под номером 3, треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны и, значит, $AB = A_1B_1$.

Аналогично доказывается, что $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

12. Два треугольника равны, если три высоты одного треугольника соответственно равны трем высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны высоты AH и A_1H_1, BG и B_1G_1, CF и C_1F_1 (рис. 21). Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

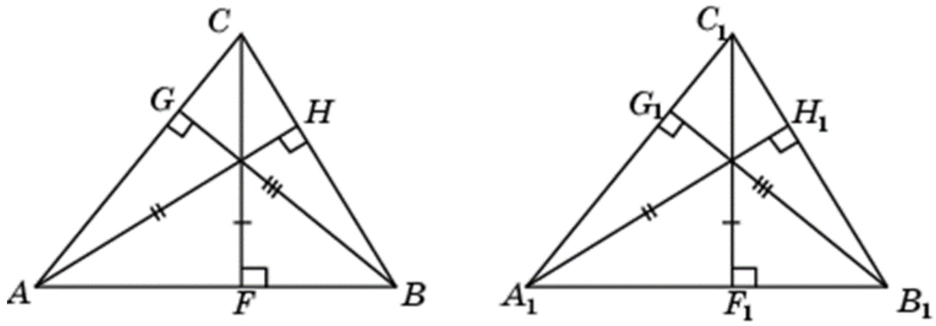

Рис. 21

Обозначим стороны треугольников соответственно a, b, c и a_1, b_1, c_1, а соответствующие высоты h_a, b_b, h_c и h_{1a}, h_{1b}, h_{1c}. Имеют место равенства $ah_a = bh_b = ch_c$ и $a_1h_{1a} = b_1h_{1b} = c_1h_{1c}$. Разделив почленно первые равенства на вторые, получим равенства $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, из которых следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Так как соответствующие высоты этих треугольников равны, то они не только подобны, но и равны.