Пространственные паркеты из многогранников[1]

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, какими многогранниками можно заполнить пространство так, чтобы любые два многогранника либо имели общую грань, либо общее ребро, либо общую вершину, либо не имели общих точек. Такое заполнение пространства многогранниками называется *пространственным паркетом*.

Ясно, что если имеется паркет на плоскости, состоящий из многоугольников (рис. 32.1), то призмы, основаниями которых служат эти многоугольники, будут образовывать пространственный паркет (рис. 32.2).

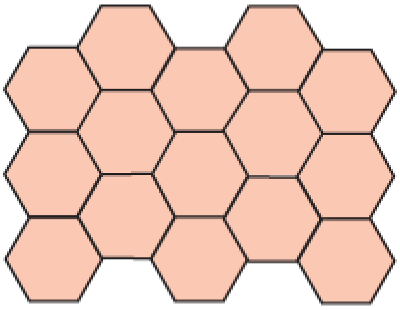

Рис. 32.1

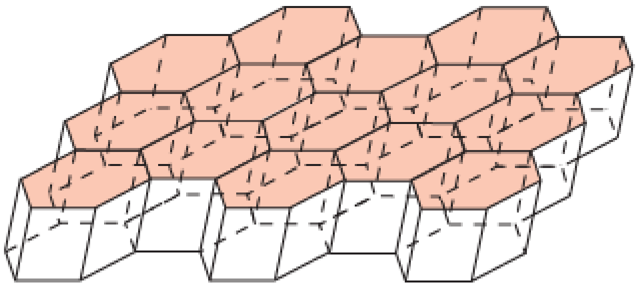

Рис. 32.2

В частности, пространственный паркет можно составить из произвольного параллелепипеда, правильной треугольной призмы, правильной шестиугольной призмы и др.

Выясним, из каких правильных многогранников можно составить пространственный паркет. Заметим, что при заполнении пространства многогранниками, сумма двугранных углов многогранников, прилегающих к одному ребру, должна составлять 360°. Поэтому из одноимённых правильных многогранников пространственный паркет можно составить только из тех, у которых двугранные углы имеют вид $\frac{360°}{n}, n \geq 3$.

Конечно, пространственный паркет можно составить из равных кубов. Двугранные углы куба равны 90°.

Найдём двугранные углы правильного тетраэдра. Пусть $ABCD$ – правильный тетраэдр с ребром 1 (рис. 32.3).

Из вершин A и D опустим перпендикуляры AE и DE на ребро BC. Угол AED будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике ADE имеем: $AD = 1$, $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя теорему косинусов, находим $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. Откуда $\varphi \approx 70°30'$. Таким образом, если при одном ребре сходится менее шести тетраэдров, то сумма их двугранных углов меньше 360°, если же взять шесть или более тетраэдров, то сумма их двугранных углов будет больше 360°. Следовательно, из правильных тетраэдров нельзя составить пространственный паркет.

---

[1] Математика. – 2009. – № 5. – С. 41-45.

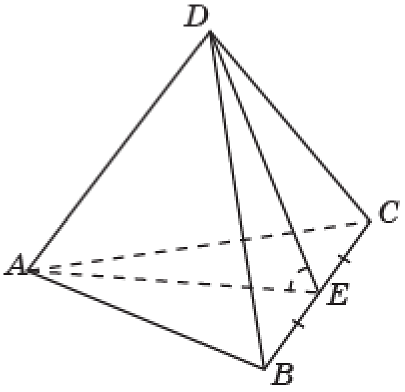

Рис. 32.3

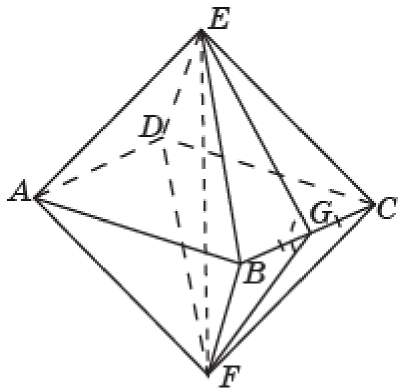

Рис. 32.4

Найдём двугранные углы октаэдра. Рассмотрим правильный октаэдр с ребром 1 (рис. 32.4).

Из вершин E и F опустим перпендикуляры EG и FG на ребро BC. Угол EGF будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике EGF имеем: $EF = \sqrt{2}$, $EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя теорему косинусов, находим $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$. Откуда $\varphi \approx 109°30'$. Таким образом, если при одном ребре сходится менее четырёх октаэдров, то сумма их двугранных углов меньше 360°, если же взять четыре или более октаэдров, то сумма их двугранных углов будет больше 360°. Следовательно, из правильных октаэдров нельзя составить пространственный паркет.

Найдём двугранные углы икосаэдра. Рассмотрим правильный икосаэдр с ребром 1 (рис. 32.5).

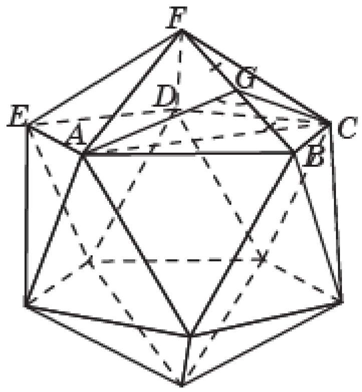

Рис. 32.5

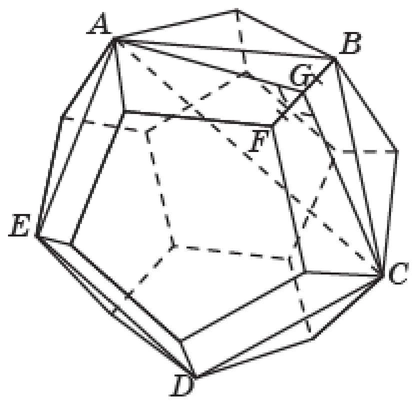

Рис. 32.6

Из вершин A и C опустим перпендикуляры AG и CG на ребро BF. Угол AGC будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике AGC имеем: $AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя теорему косинусов, находим $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Откуда $\varphi \approx 138°11'$. Таким образом, если при одном ребре сходится менее трёх икосаэдров, то сумма их двугранных углов меньше 360°, если же взять три или более икосаэдров, то сумма их двугранных углов будет больше 360°. Следовательно, из правильных икосаэдров нельзя составить пространственный паркет.

Найдём двугранные углы додекаэдра. Рассмотрим правильный додекаэдр с ребром 1 (рис. 6).

Из вершин A и C опустим перпендикуляры AG и CG на ребро BF. Угол AGC будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ стороны равны $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. AC – диагональ этого пятиугольника и, следовательно, $AC = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Кроме того, $AG = CG = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$. Используя теорему косинусов, находим $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Откуда $\varphi \approx 116°34'$. Таким образом, если при одном ребре сходится менее трёх додекаэдров, то сумма их двугранных углов меньше 360°, если же взять три или более додекаэдров, то сумма их двугранных углов будет больше 360°. Следовательно, из правильных додекаэдров также нельзя составить пространственный паркет.

В результате получаем, что единственным правильным многогранником, которым можно заполнить пространство, т. е. составить пространственный паркет, является куб.

Используя куб, можно привести примеры других многогранников, из которых можно составить пространственный паркет.

Так, например, куб можно разбить на правильные четырёхугольные пирамиды, основаниями которых являются грани куба, а вершиной – центр куба (рис. 32.7). Одной из таких пирамид является пирамида $OABCD$. Если в пространственном паркете из кубов каждый куб разбить на правильные четырёхугольные пирамиды, то получим пространственный паркет из правильных четырёхугольных пирамид.

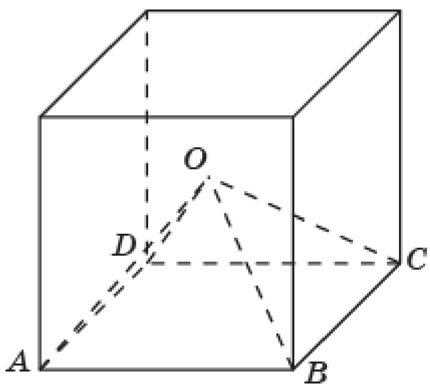

Рис. 32.7

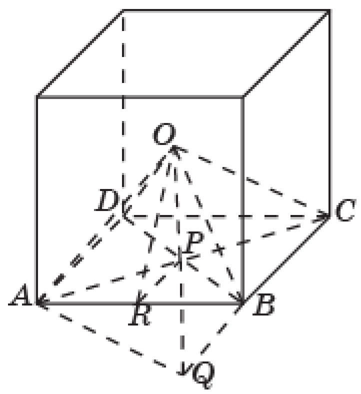

Рис. 32.8

Правильную четырёхугольную пирамиду $OABCD$ можно разбить на две равные треугольные пирамиды $OABC$ и $OACD$ (рис. 32.8).

Разбиение кубов на такие пирамиды даёт пространственный паркет, состоящий из треугольных пирамид – тетраэдров. Для единичного куба эти тетраэдры имеют ребра, равные $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$, 1, 1. Тетраэдр $OABC$ можно разбить на два равных тетраэдра $OABP$ и $OBCP$, где P – середина AC. Рёбра этих тетраэдров равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$. Тетраэдр $OABP$, в свою очередь, можно разбить на два равных тетраэдра $OARP$ и $OBRP$. Рёбра этих тетраэдров равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. Наконец, из двух тетраэдров, равных тетраэдру $OABP$ можно составить один тетраэдр $OABQ$, из которого также можно составить пространственный паркет. Рёбра этого тетраэдра равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, 1. Заметим, что гранями последнего тетраэдра являются равные равнобедренные треугольники со сторонами $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1.

Оказывается, что никаких других тетраэдров, из которых можно составить пространственный паркет, кроме четырёх тетраэдров, перечисленных выше, не существует (см. [1]).

Приведём другие примеры многогранников, из которых можно составить пространственные паркеты.

На рисунке 32.9 изображен ромбододекаэдр – многогранник, поверхность которого состоит из двенадцати равных ромбов. Форму ромбододекаэдра имеет кристалл граната. Поэтому его называют также гранатоэдр [3].

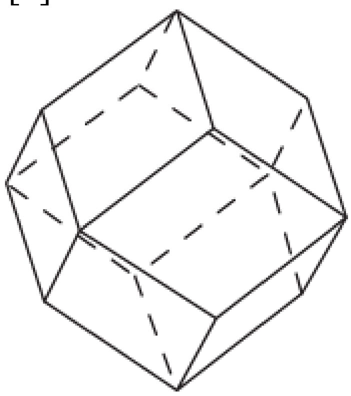

Рис. 32.9

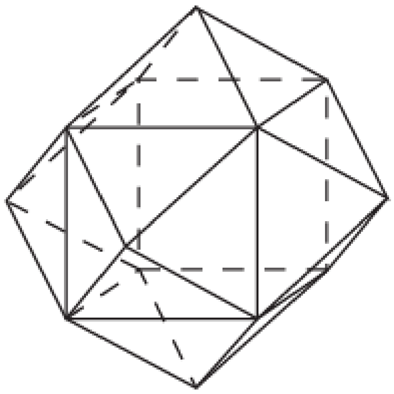

Рис. 32.10

Ромбододекаэдр можно получить из двух кубов следующим образом. Разрежем один из кубов на шесть равных правильных четырёхугольных пирамид с вершинами в центре куба, основаниями которых являются грани куба. Поставим каждую такую пирамиду основанием на грань неразрезанного куба. Получим ромбододекаэдр (рис. 32.10).

Приступим теперь к составлению паркета. Рассмотрим пространственный паркет из кубов, раскрашенных в чёрный и белый цвета в шахматном порядке так, что по граням соприкасаются только чёрные и белые кубы. Разобьём белые кубы на правильные четырёхугольные пирамиды и присоединим их к прилегающим чёрным кубам. В результате получим искомый пространственный паркет из ромбододекаэдров.

Используя ромбододекаэдр, приведём пример ещё одного многогранника, из которого можно составить пространственный паркет.

Разрежем ромбододекаэдр плоскостью, проходящей через центр вписанного в него куба, параллельно одной из граней куба. В сечении будет квадрат $ABCD$ со стороной, равной диагонали грани куба (рис. 32.11, а). Вставим между двумя половинками ромбододекаэдра правильную четырёхугольную призму. Получим многогранник, поверхность которого состоит из двенадцати граней: восьми ромбов и четырёх шестиугольников (рис. 32.11, б).

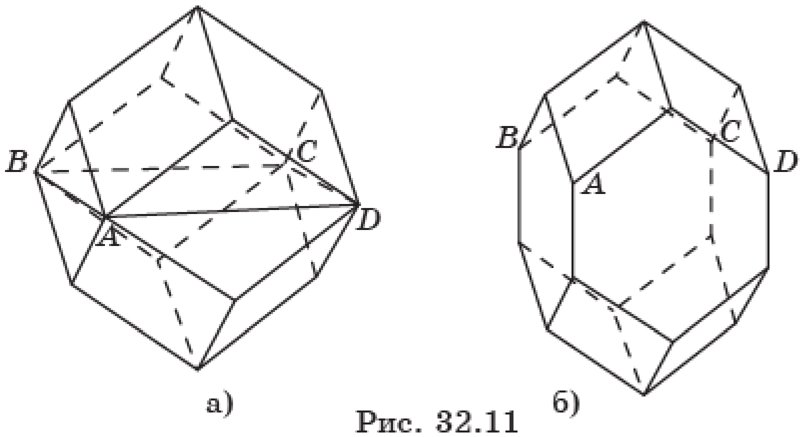

Рис. 32.11

Покажем, что из таких двенадцатигранников можно составить пространственный паркет. Для этого разрежем паркет из ромбододекаэдров плоскостями, проходящими через центры чёрных кубов и параллельными одной выбранной грани чёрного куба. В пересечении каждой такой плоскости с ромбододекаэдрами образуется плоский паркет из квадратов. В каждый разрез вставим правильные четырёхугольные призмы, основаниями которых являются квадраты из плоского паркета. В результате получим искомый пространственный паркет.

Приведём пример ещё одного многогранника, из которого можно составить пространственный паркет. Он называется усечённым октаэдром, и получается из октаэдра отсечением от его вершин правильных четырёхугольных пирамид, боковые рёбра которых равны одной трети ребра данного октаэдра (рис. 32.12, а). Гранями усечённого октаэдра являются шесть квадратов и восемь правильных шестиугольников (рис. 32.12, б).

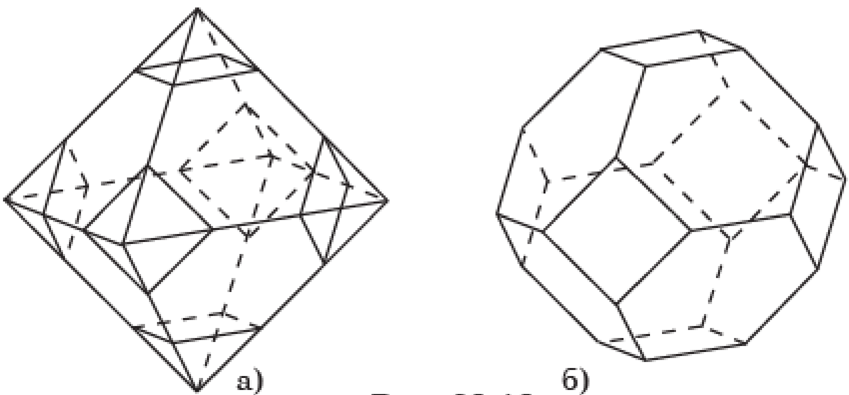

Рис. 32.12

Разрежем усечённый октаэдр на восемь равных частей плоскостями, проходящими через пары противолежащих рёбер октаэдра (рис. 32.13).

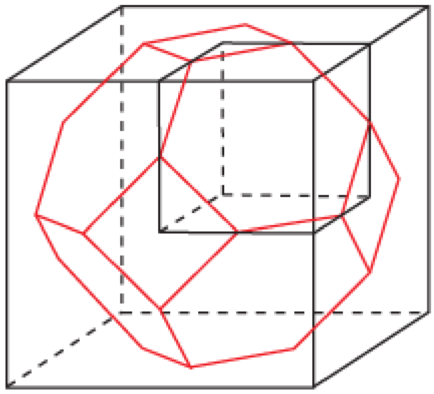

Рис. 32.13

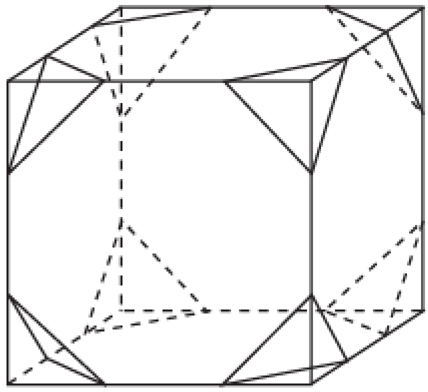

Рис. 32.14

Каждая такая часть представляет собой половинку куба, полученную разрезанием куба по плоскости, дающей в сечении куба правильный шестиугольник.

Если взять два равных усечённых октаэдра, один из них разрезать на восемь равных частей и присоединить эти части к шестиугольным граням неразрезанного усечённого октаэдра, то получим куб.

Рассмотрим пространственный паркет, состоящий из кубов, с вписанными в них усечёнными октаэдрами. Эти усечённые октаэдры не заполняют всё пространство. Между ними остаются пустоты. Однако эти пустоты расположены вокруг вершин кубов и представляют собой объединение восьмых частей усечённых октаэдров и, следовательно, сами являются усечёнными октаэдрами. Таким образом, всё пространство оказывается разбитым на усечённые октаэдры, и любые два таких усечённых октаэдра получаются друг из друга параллельным переносом.

Заметим, что в пяти из рассмотренных выше пространственных паркетов, многогранники расположены параллельно друг другу. Это паркеты из шестиугольных призм, кубов (параллелепипедов), ромбододекаэдров, двенадцатигранников, полученных из ромбододекаэдра добавлением правильных четырёхугольных призм и усечённых октаэдров.

Такие выпуклые многогранники, из которых можно составить пространственный паркет так, чтобы любые два многогранника из этого паркета получались друг из друга параллельным переносом, называются параллелоэдрами. Отечественным математиком и кристаллографом Е. С. Федоровым (1853–1919) было доказано, что существует только пять типов параллелоэдров: куб (параллелепипед), правильная шестиугольная призма, усечённый октаэдр, ромбододекаэдр и двенадцатигранник, полученный из ромбододекаэдра (см. [2]).

Приведём примеры пространственных паркетов, составленных из нескольких различных многогранников.

На рисунке 32.14 изображён многогранник, называемый усечённым кубом.

Его гранями являются правильные треугольники и восьмиугольники. Он получается из куба отсечением от его вершин правильных треугольных пирамид. Непосредственные вычисления показывают, что для единичного куба боковые рёбра этих пирамид должны быть равны $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Если в пространственном паркете из кубов заменить кубы на усечённые кубы, то между ними останутся пустоты в виде октаэдров. Таким образом, усечённые кубы и октаэдры образуют пространственный паркет.

На рисунке 32.15 изображён многогранник, называемый кубооктаэдром. Его гранями являются шесть квадратов (как у куба) и восемь правильных треугольников (как у октаэдра). Он получается из куба отсечением от его вершин правильных треугольных пирамид, боковые рёбра которых равны половине ребра куба. Если в пространственном паркете из кубов заменить кубы на кубооктаэдры, то между ними останутся пустоты в виде октаэдров. Таким образом, кубооктаэдры и октаэдры образуют пространственный паркет.

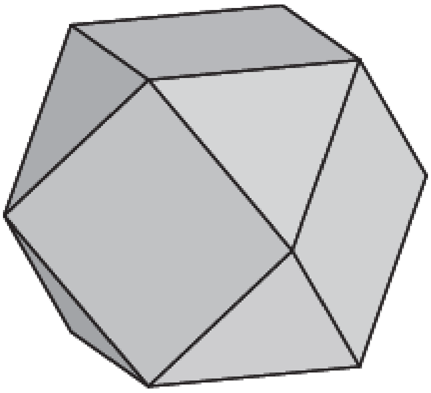
Рис. 32.15

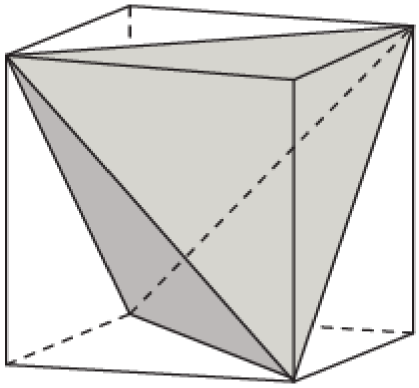
Рис. 32.16

Рассмотрим пространственный паркет, состоящий из кубов, с вписанными в них правильными тетраэдрами (рис. 32.16). Эти тетраэдры не заполняют всё пространство. Между ними остаются пустоты. Однако эти пустоты расположены вокруг вершин кубов и представляют собой объединение восьмых частей октаэдров и, следовательно, сами являются октаэдрами. Таким образом, мы имеем пространственный паркет, составленный из правильных тетраэдров и октаэдров.

На рисунке 32.17 изображён многогранник, называемый ромбокубооктаэдром.

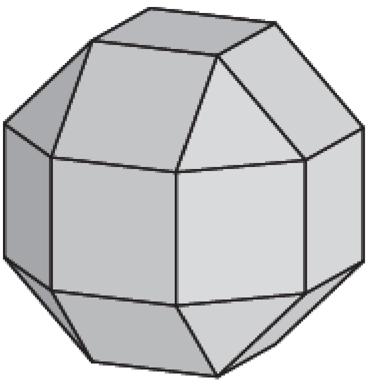
Рис. 32.17

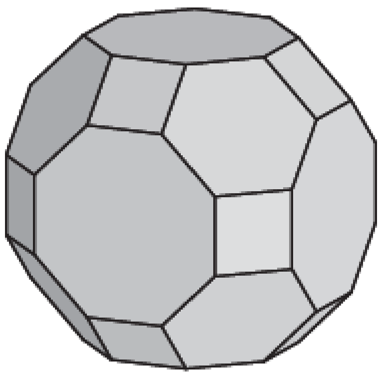
Рис. 32.18

Его гранями являются квадраты и правильные треугольники. Он получается из единичного куба следующим образом. Перенесём грани куба в направлении от его центра на расстояние, равное $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вершины этих граней будут служить вершинами искомого ромбокубооктаэдра. Будем заполнять пространство ромбокубооктаэдрами, совмещая их грани, полученные из граней куба. На остальные квадратные грани робокубооктаэдров поставим кубы, а на треугольные грани поставим кубооктаэдры. В результате получим пространственный паркет, составленный из ромбокубооктаэдров, кубов и кубооктаэдров.

На рисунке 32.18 изображён многогранник, называемый усечённым кубооктаэдром. Его гранями являются правильные восьмиугольники, шестиугольники и квадраты. Он получается из усечённого куба следующим образом. Перенесём восьмиугольные грани усечённого куба, рёбра которого равны 1, в направлении от его центра на расстояние, равное $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вершины этих граней будут служить вершинами искомого усечённого кубооктаэдра.

Будем заполнять пространство усечёнными кубооктаэдрами, совмещая их грани, полученные из восьмиугольных граней усечённого куба и так, чтобы шестиугольные грани одного усечённого кубооктаэдра примыкали к квадратным граням другого кубооктаэдра. Пустоты между этими усечёнными кубооктаэдрами будут иметь форму усечённых октаэдров. Таким образом, эти усечённые кубооктаэдры и усечённые октаэдры будут образовывать пространственный паркет.

В заключение предлагаем упражнения для самостоятельного решения.

1. Можно ли составить пространственный паркет из произвольной: а) треугольной призмы; б) четырёхугольной призмы; в) шестиугольной призмы?

2. Можно ли составить паркет из какой-нибудь пятиугольной призмы?

3. Найдите двугранные углы, образованные гранями: а) усечённого октаэдра; б) ромбододекаэдра.

4. Вершинами какого многогранника являются центры граней ромбододекаэдра?

5. Покажите, что из равных правильных четырёхугольных и равных шестиугольных пирамид можно составить пространственный паркет.

6. Найдите двугранные углы тетраэдров, из которых можно составить пространственный паркет.

7. Можно ли составить пространственный паркет из пространственного креста – многогранника, полученного объединением семи кубов (рис. 32.19).

8. На рисунке 32.20 изображён многогранник, называемый звёздчатым октаэдром, получающийся продолжением граней октаэдра. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И. Кеплером и назван им "*Stella octangula*" - звезда восьмиугольная. Какой правильный многогранник нужно добавить к нему, чтобы из них можно было составить пространственный паркет?

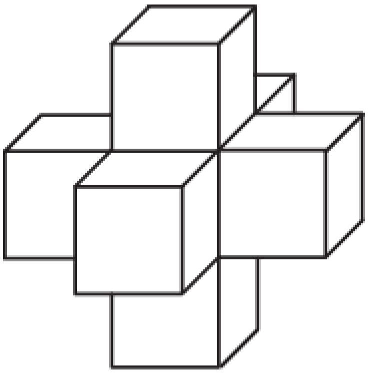

Рис. 32.19

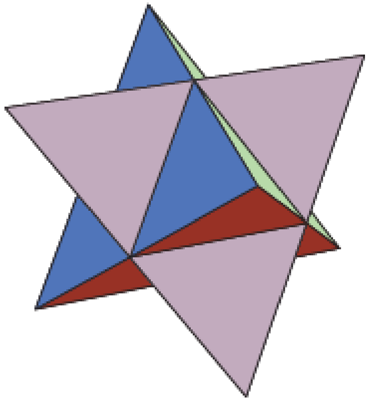

Рис. 32.20

Литература

1. Бончковский Р. Н. Заполнение пространства тетраэдрами // Математическое просвещение. – 1935. – № 4. – С. 26. (Имеется на сайте www.mccme.ru)

2. Делоне Б., Житомирский О. Задачник по геометрии. – М.–Л.: Гос. изд. техн.-теорет. литературы, 1950. (Имеется на сайте www.mccme.ru)

3. Смирнова И. М. Познакомьтесь: ромбододекаэдр // Математика в школе. – 1996. - № 1. – С. 47-51.

4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 10 (11) класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Мнемозина, 2014 (2014).