ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA

Задачи с параметром занимают важное место в Едином Государственном экзамене по математике.

Трудности в их решении, во многом, обусловлены недостаточной наглядностью изменений, происходящих при изменении параметра и, как следствие, сложностью проведения решения таких задач.

Здесь мы рассмотрим возможности использования компьютерной программы GeoGebra для визуализации решений задач с параметром.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Откроем программу GeoGebra. Создадим ползунок a, изменяющийся от -2 до 2.

В нижней строке окна наберём $x + y = a$ и нажмём Enter. На экране появится прямая, задаваемая уравнением $x + y = a$. Кликнем по ней правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 = 1 и нажмём Enter. На экране появится соответствующая окружность.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения прямой и окружности.

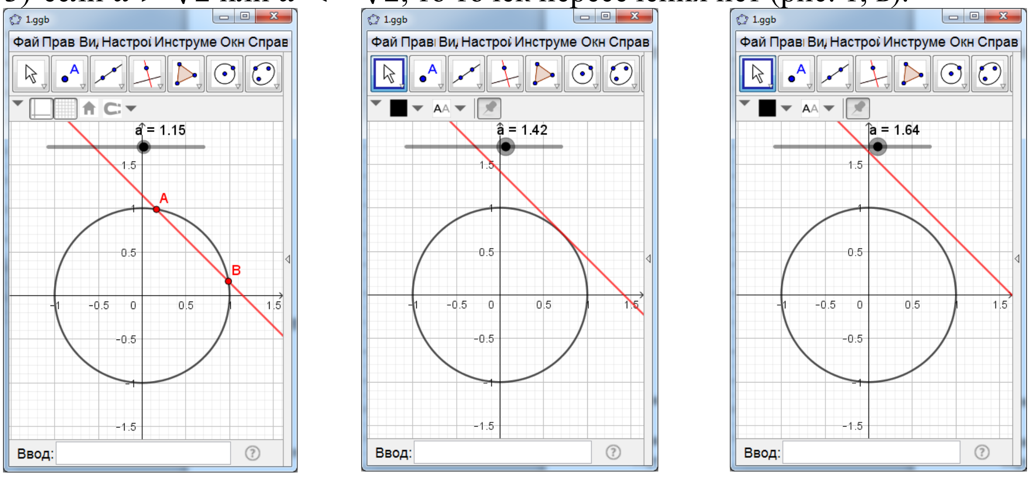
При перемещении ползунка прямая будет менять своё положение, и количество точек пересечения будет меняться.

Нетрудно видеть, что:

1) если $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, то имеется две точки пересечения (рис. 1, а);

2) если $a = -\sqrt{2}$ или $a = \sqrt{2}$, то имеется одна точка пересечения (рис. 1, б);

3) если $a > \sqrt{2}$ или $a < -\sqrt{2}$, то точек пересечения нет (рис. 1, в).



а) б) в)

Рис. 1

Ответ. $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

Отметим, что приведённые рассуждения не заменяют решения. Приведём одно из возможных таких решений.

Решение. Расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $x + y = a$, равно $\frac{\sqrt{2}}{2}|a|$. Воспользуемся тем, что прямая и окружность имеют две общие точки тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности. В нашем случае это означает выполнимость неравенства $\frac{\sqrt{2}}{2}|a| < 1$, которое эквивалентно неравенству $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

Решения следующих задач аналогичны.

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений.

Создадим ползунок a, изменяющийся от 0 до 2.

В нижней строке окна наберём $|x| + |y| = a$ и нажмём Enter. На экране появится квадрат, задаваемый этим уравнением. Кликнем по нему правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

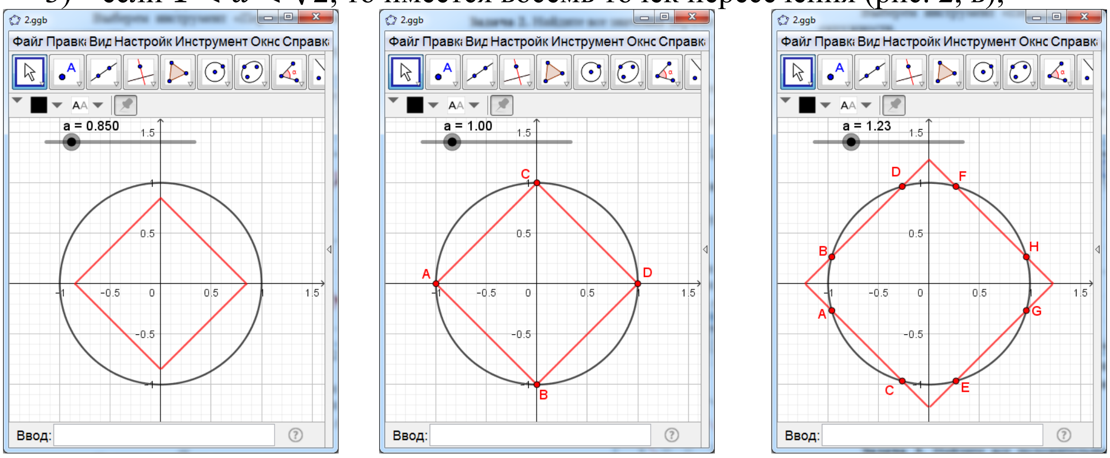
В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 = 1 и нажмём Enter. На экране появится соответствующая окружность.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения квадрата и окружности.

При перемещении ползунка квадрат будет менять своё положение, и количество точек пересечения будет меняться.

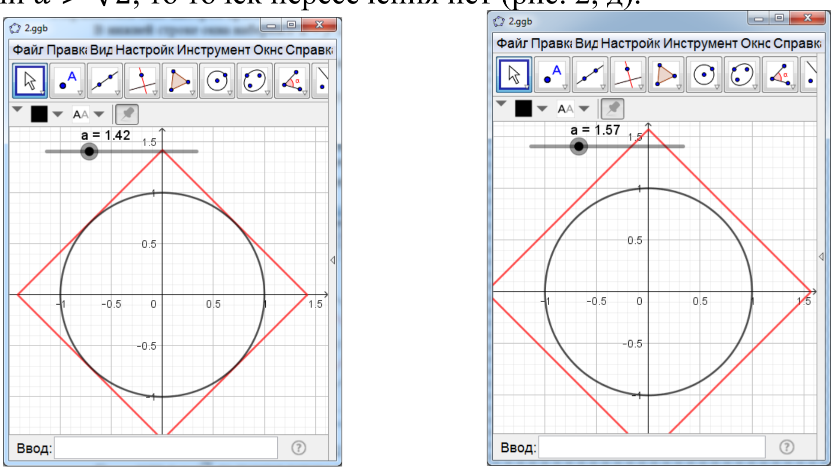
Нетрудно видеть, что:

1) если $0 \leq a < 1$, то точек пересечения нет (рис. 2, а);
2) если $a = 1$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 2, б);
3) если $1 < a < \sqrt{2}$, то имеется восемь точек пересечения (рис. 2, в);



а) б) в)

4) если $a = \sqrt{2}$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 2, г);
5) если $a > \sqrt{2}$, то точек пересечения нет (рис. 2, д).



г) д)

Рис. 2

Ответ. $1 < a < \sqrt{2}$.

Задача 3. Найдите все положительные значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x+y|+|x-y|=2, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений.

Создадим ползунок a, изменяющийся от 0 до 2.

В нижней строке окна наберём $|x + y| + |x - y| = 2$ и нажмём Enter. На экране появится квадрат, задаваемый этим уравнением.

В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 = a^2 и нажмём Enter. На экране появится соответствующая окружность. Кликнем по ней правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения квадрата и окружности.

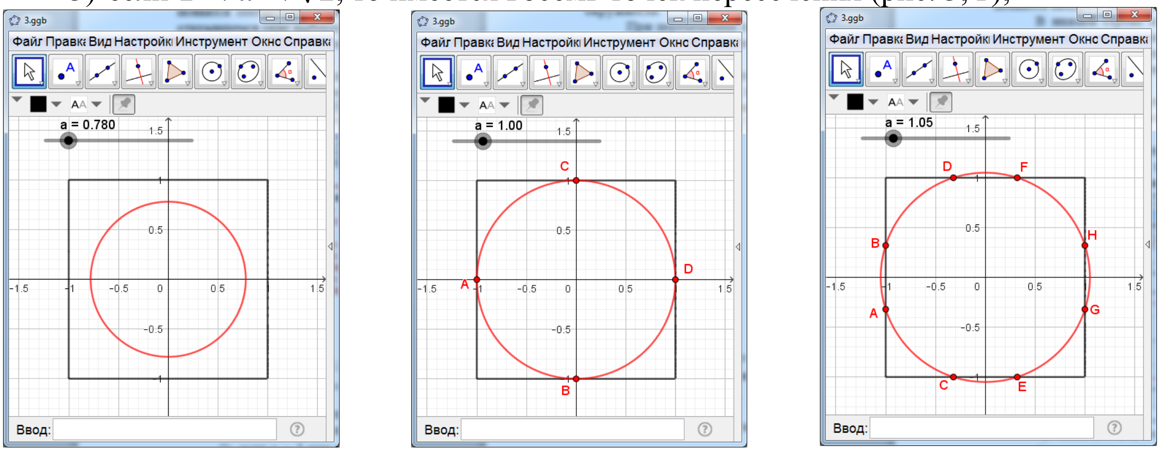
При перемещении ползунка квадрат будет менять своё положение, и количество точек пересечения будет меняться.

Нетрудно видеть, что:

1) если $0< a < 1$, то точек пересечения нет (рис. 3, а);

2) если $a = 1$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 3, б);

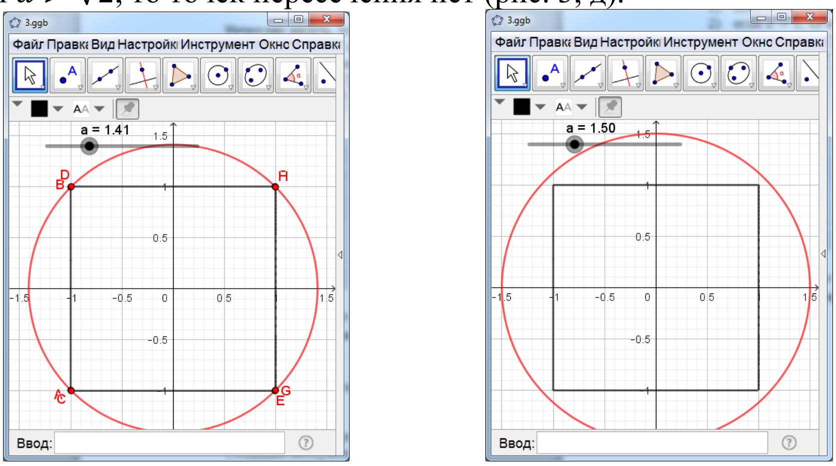
3) если $1 < a < \sqrt{2}$, то имеется восемь точек пересечения (рис. 3, в);



а) б) в)

4) если $a = \sqrt{2}$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 3, г);

5) если $a > \sqrt{2}$, то точек пересечения нет (рис. 3, д).



г) д)

Рис. 3

Ответ. $1 < a < \sqrt{2}$.

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x+y|+|x-y|=2a, \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений.

Создадим ползунок a, изменяющийся от 0 до 2.

В нижней строке окна наберём $|x + y| + |x - y| = 2a$ и нажмём Enter. На экране появится квадрат, задаваемый этим уравнением. Кликнем по нему правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

В нижней строке окна наберём $|x| + |y| = 1$ и нажмём Enter. На экране соответствующий квадрат.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения этих квадратов.

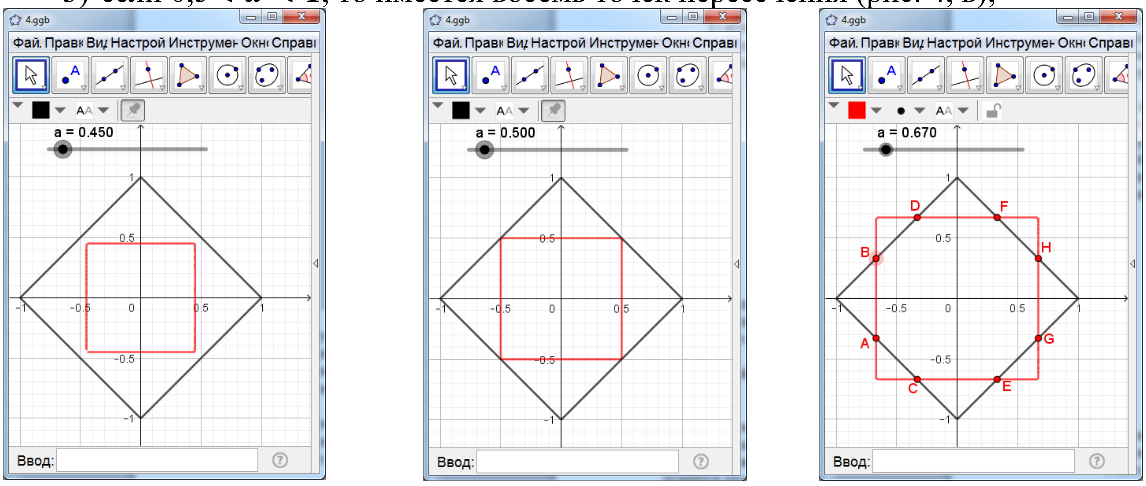
При перемещении ползунка красный квадрат будет менять своё положение, и количество точек пересечения будет меняться.

Нетрудно видеть, что:

1) если $0\leq a < 0{,}5$, то точек пересечения нет (рис. 4, а);

2) если $a = 0{,}5$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 4, б);

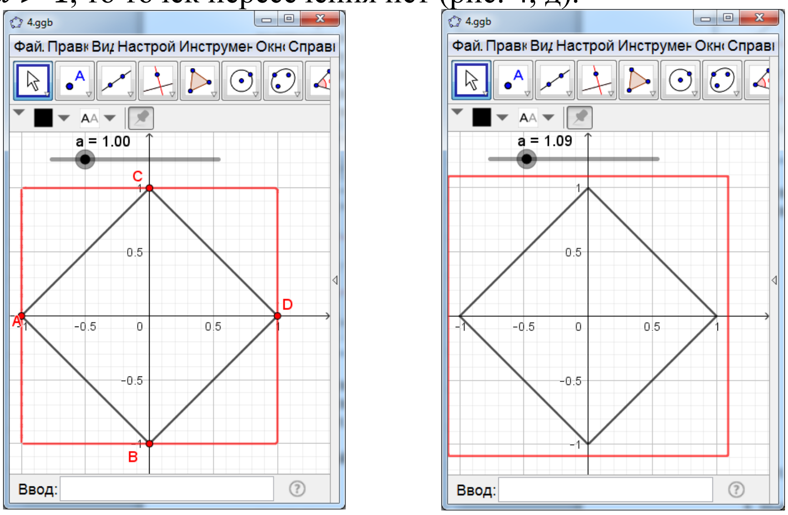
3) если $0{,}5< a < 1$, то имеется восемь точек пересечения (рис. 4, в);



а) б) в)

4) если $a = 1$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 4, г);

5) если $a > 1$, то точек пересечения нет (рис. 4, д).



г) д)

Рис. 4

Ответ. $0{,}5 < a < 1$.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x+y|+|x-y|=2, \\ (x-a)^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет два решения.

Создадим ползунок a, изменяющийся от -3 до 3.

В нижней строке окна наберём |*x* + *y*| + |*x* – *y*| = 2 и нажмём Enter. На экране появится квадрат, задаваемый этим уравнением.

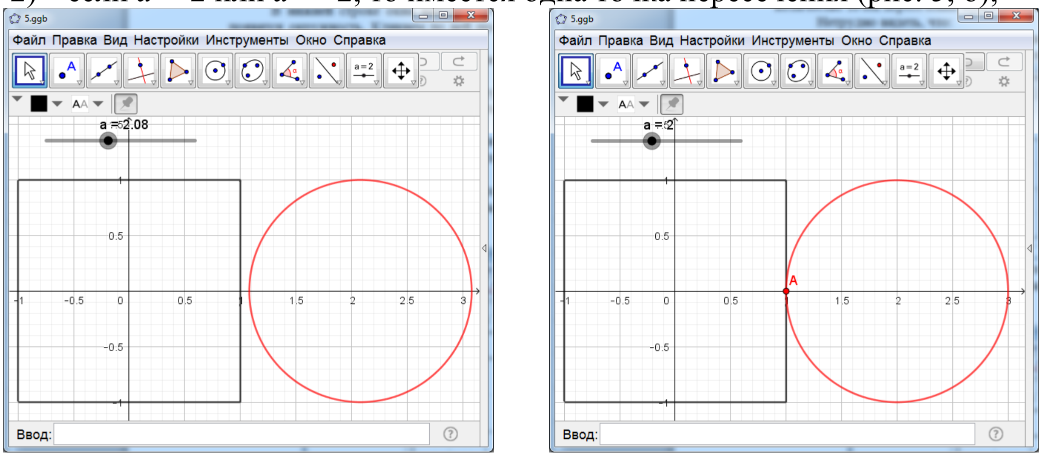
В нижней строке окна наберём (*x*-*a*)^2 + *y*^2 = 1 и нажмём Enter. На экране появится окружность. Кликнем по ней правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения квадрата и окружности.

При перемещении ползунка окружность будет менять своё положение, и количество точек пересечения будет меняться.

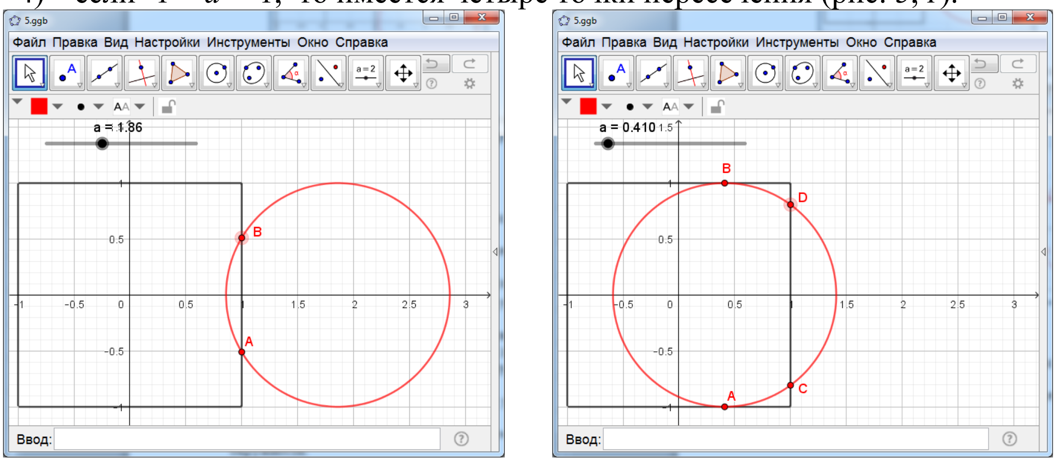
Нетрудно видеть, что:

1) если $a > 2$ или $a < -2$, то точек пересечения нет (рис. 5, а);
2) если $a = 2$ или $a = -2$, то имеется одна точка пересечения (рис. 5, б);



а) б)

3) если $1 \le a < 2$ или $-2 < a \le -1$, то имеется две точки пересечения (рис. 5, в);
4) если $-1 < a < 1$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 5, г).



в) г)

Рис. 5

Ответ. $1 \le a < 2$ или $-2 < a \le -1$.

Задача 6. Найдите все положительные значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x| + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Создадим ползунок a, изменяющийся от -2 до 2.

В нижней строке окна наберём $y = |x| + a$ и нажмём Enter. На экране появится соответствующий график. Кликнем по нему правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

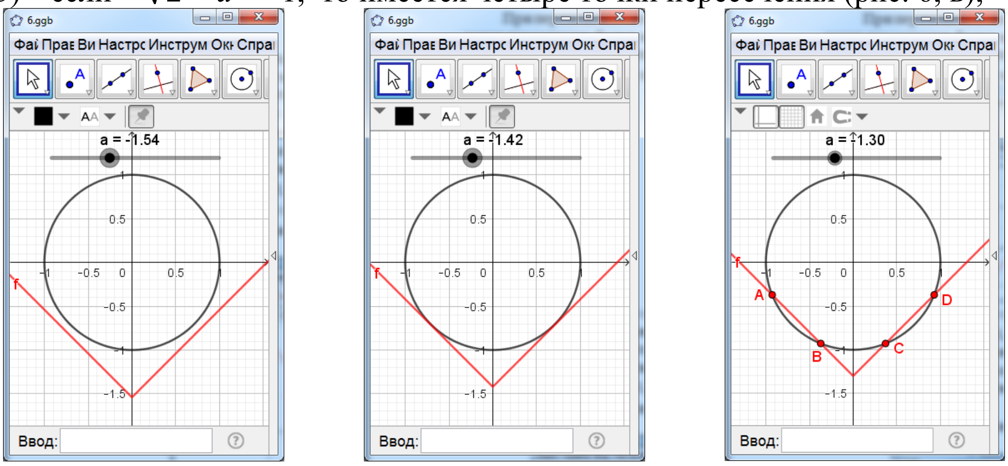
В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 = 1 и нажмём Enter. На экране появится окружность.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения графика и окружности.

При перемещении ползунка график будет менять своё положение, и количество точек пересечения будет меняться.

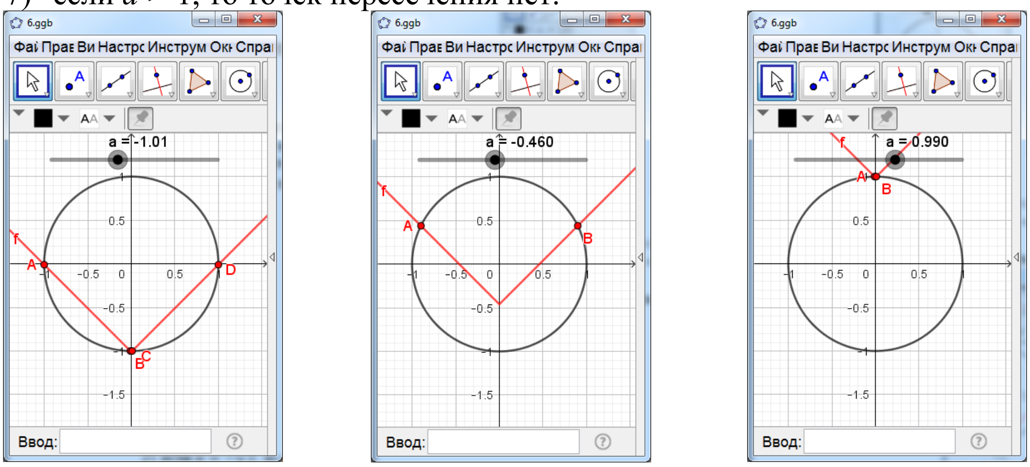
Нетрудно видеть, что:

1) если $a < -\sqrt{2}$, то точек пересечения нет (рис. 6, а);
2) если $a = -\sqrt{2}$, то имеется две точки пересечения (рис. 6, б);
3) если $-\sqrt{2} < a <$ -1, то имеется четыре точки пересечения (рис. 6, в);



а) б) в)

4) если a = -1, то имеется три точки пересечения (рис. 6, г);
5) если -1 < a < 1, то имеется две точки пересечения (рис. 6, д);
6) если a = 1, то имеется одна точка пересечения (рис. 6, е);
7) если a > 1, то точек пересечения нет.



г) д) е)

Рис. 6

Ответ. –1 < a < 1 или $a = -\sqrt{2}$.

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Создадим ползунок a, изменяющийся от -4 до 4.

В нижней строке окна наберём $x + y = a$ и нажмём Enter. На экране появится соответствующая прямая. Кликнем по ней правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

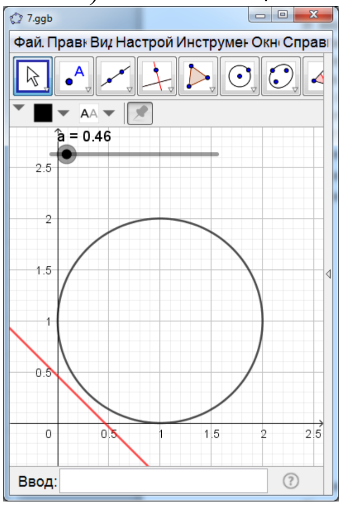
В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 и нажмём Enter. На экране появится окружность.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения графика и окружности.

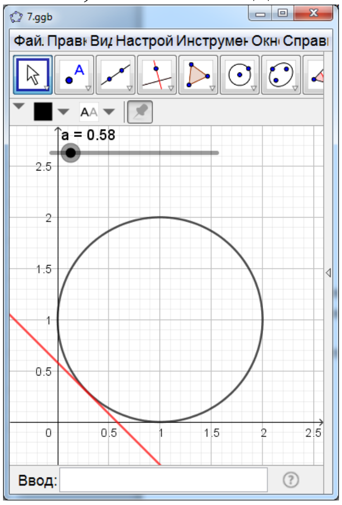
При перемещении ползунка прямая будет менять своё положение, и количество точек пересечения будет меняться.

Нетрудно видеть, что:

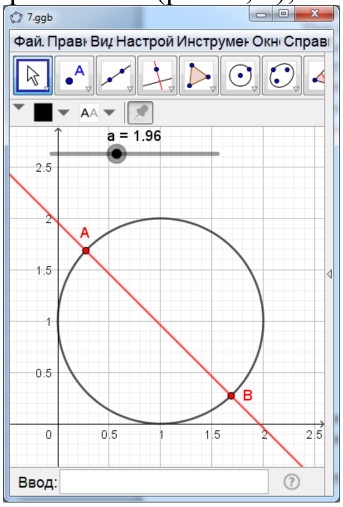
1) если $a < 2 - \sqrt{2}$, то точек пересечения нет (рис. 7, а);
2) если $a = 2 - \sqrt{2}$, то имеется одна точка пересечения (рис. 7, б);
3) если $2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$, то имеется две точки пересечения (рис. 7, в);



а)

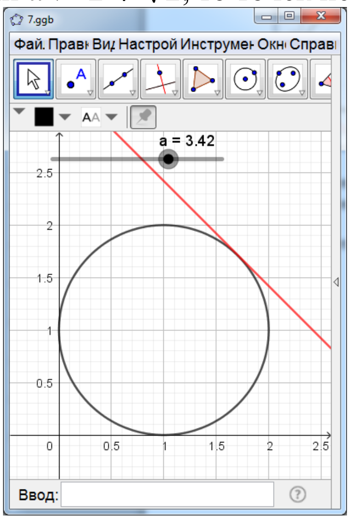


б)

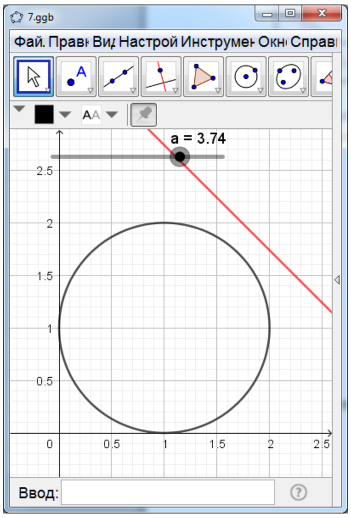


в)

4) если $a = 2 + \sqrt{2}$, то имеется одна точка пересечения;
5) если $a > 2 + \sqrt{2}$, то точек пересечения нет.



г)



д)

Рис. 7

Ответ. $a = 2 - \sqrt{2}$ или $a = 2 + \sqrt{2}$.

Задача 8. Найдите все положительные значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Создадим ползунок a, изменяющийся от 0 до 4.

В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 = a^2 и нажмём Enter. На экране появится соответствующая окружность. Кликнем по ней правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

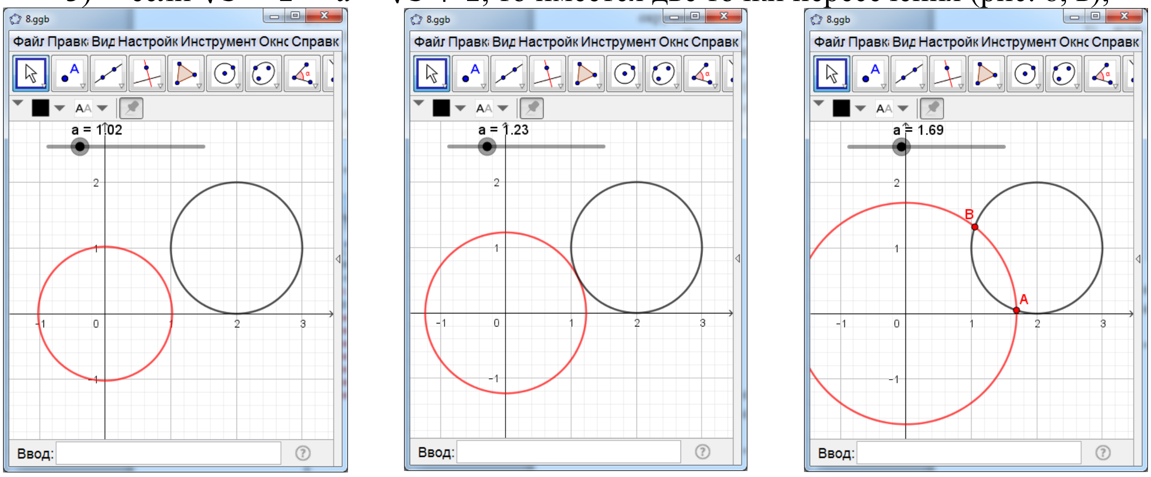
В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 и нажмём Enter. На экране появится окружность.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения графика и окружности.

При перемещении ползунка окружность будет менять свой радиус, и количество точек пересечения будет меняться.

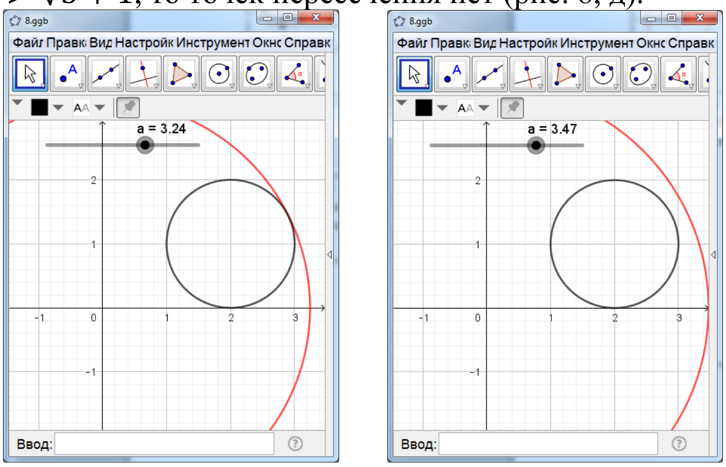
Нетрудно видеть, что:

1) если $0 < a < \sqrt{5} - 1$, то точек пересечения нет (рис. 8, а);
2) если $a = \sqrt{5} - 1$, то имеется одна точка пересечения (рис. 8, б);
3) если $\sqrt{5} - 1 < a < \sqrt{5} + 1$, то имеется две точки пересечения (рис. 8, в);



а) б) в)

4) если $a = \sqrt{5} + 1$, то имеется одна точка пересечения (рис. 8, г);
5) если $a > \sqrt{5} + 1$, то точек пересечения нет (рис. 8, д).



г) д)

Рис. 8

Ответ. $a = \sqrt{5} - 1$ или $a = \sqrt{5} + 1$.

Задача 9. (Демоверсия ЕГЭ 2019) Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Создадим ползунок a, изменяющийся от 0 до 4.

В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 = a^2 и нажмём Enter. На экране появится соответствующая окружность. Кликнем по ней правой кнопкой мыши, и в открывшемся окне выберем красный цвет.

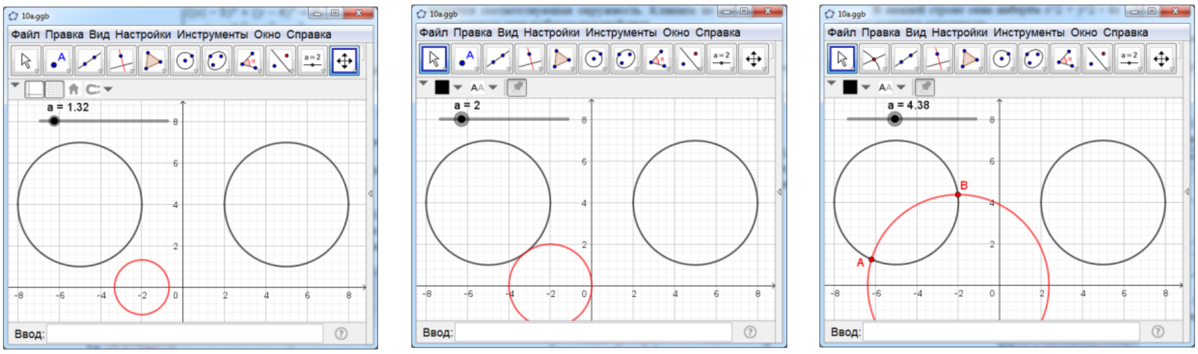
В нижней строке окна наберём x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 и нажмём Enter. На экране появится окружность.

Выберем инструмент «Пересечение» и найдём точки пересечения графика и окружности.

При перемещении ползунка окружность будет менять свой радиус, и количество точек пересечения будет меняться.

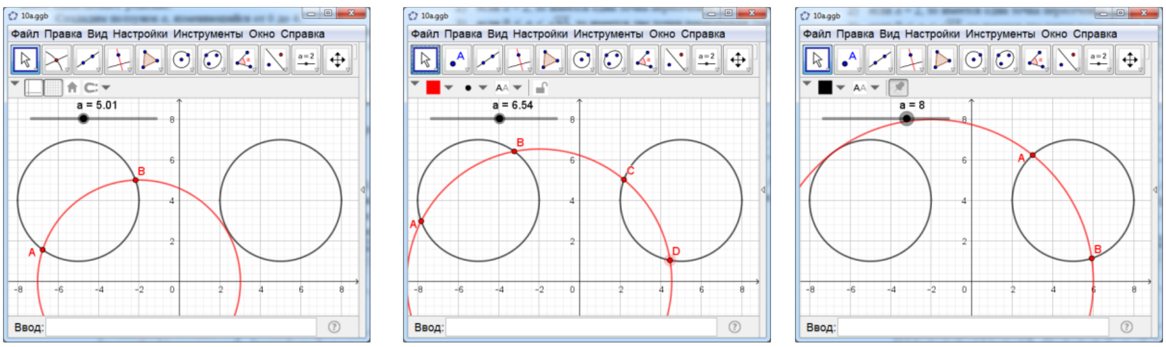
Нетрудно видеть, что:

1) если $0 \le a < 2$, то точек пересечения нет (рис. 9, а);
2) если $a = 2$, то имеется одна точка пересечения (рис. 9, б);
3) если $0 \le a < \sqrt{65}$, то имеется две точки пересечения (рис. 9, в);



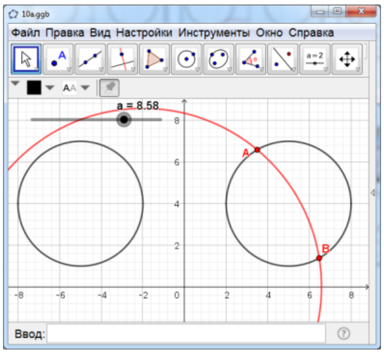
а) б) в)

4) если $a = \sqrt{65}$, то имеется три точки пересечения (рис. 9, г);
5) если $\sqrt{65} < a < 8$, то имеется четыре точки пересечения (рис. 9, д);
6) если $a = 8$, то имеется три точки пересечения (рис. 9, е);

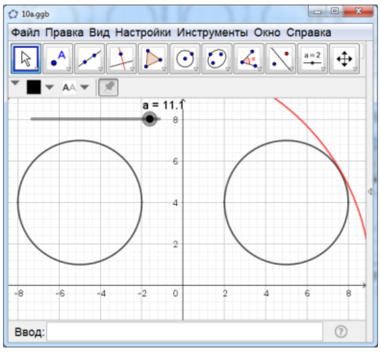


г) д) е)

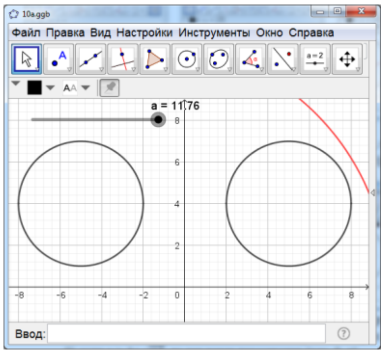
7) если $8 < a < 3+\sqrt{65}$, то имеется две точки пересечения (рис. 9, ж);
8) если $a = 3+\sqrt{65}$, то имеется одна точка пересечения (рис. 9, з);
9) если $a > 3+\sqrt{65}$, то нет точек пересечения (рис. 9, и).



ж)



з)



и)

Рис. 9

Ответ. $a = 2$ или $a = 3+\sqrt{65}$.