И.М.Смирнова, В.А.Смирнов

ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Тема «Измерение длин отрезков» является основой, на которой строится весь курс геометрии средней школы. В разных учебниках геометрии предлагаются разные подходы к изложению этой темы. Рассмотрим и проанализируем некоторые из них.

В учебнике [1] вопрос об измерении длины отрезка рассматривается только в 9-ом классе в теме «Подобные фигуры». Здесь вводится понятие единичного отрезка – отрезка, с которым сравнивают другие отрезки. Говорится, что измерить отрезок, соизмеримый с единицей, значит узнать, сколько раз в нем содержится единица или какая-нибудь доля единицы. Рассматривается также случай несоизмеримых отрезков. Показывается, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Вводятся бесконечные десятичные дроби и определяются действия над ними. В дальнейшем под длиной отрезка понимается его численная мера при определенной единице измерения.

До этого под длиной отрезка в этом учебнике имелся в виду сам отрезок. Определялись действия над отрезками: сумма, разность, умножение на натуральное число, сравнение отрезков. Доказывались теоремы о соотношении сторон в треугольнике и о длине ломаной.

В противоположность этому подходу в учебнике [2] действия над отрезками не определяются. Понятие длины отрезка появляется в самом начале 7-го класса. За аксиому принимается следующее свойство измерения отрезков:

Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Два отрезка называются равными, если они имеют равные длины.

Вопросы о том, как производить измерение отрезков, что такое несоизмеримые отрезки, какими числами могут выражаться длины отрезков, не рассматриваются. Более того, поскольку к моменту введения этой аксиомы учащиеся имеют представления только о рациональных числах, то при таком подходе у них может сложиться неверное представление о том, что длина каждого отрезка выражается рациональным числом.

Кроме этого, поскольку понятие длины отрезка входит в определение равенства, то сами основания геометрии становятся не вполне понятны школьникам.

В учебнике [3] вопрос о сравнении отрезков рассматривается в самом начале 7-го класса. Говорится, что измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за единицу измерения. Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т.е. выразить его длину некоторым положительным числом. Приводятся свойства длины отрезка:

- *равные отрезки имеют равные длины;*

- *меньший отрезок имеет меньшую длину;*

- *если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.*

Таким образом, здесь так же как и в учебнике [2] ничего не говорится о том, какими числами могут выражаться длины отрезков. Правда, в отличие от учебника [2], понятие длины не входит в определение равенства и тем самым не кладется в основу геометрии.

В учебнике [4] в начале 7-го класса рассматривается сравнение отрезков и определяются действия над отрезками: сложение, вычитание, умножение отрезка на натуральное число, деление отрезка на равные части. Затем вводится понятие длины отрезка. Длина отрезка это геометрическая величина, характеризующая его протяженность. Измеряя длину, опираются на два основных ее свойства:

1. *Длины равных отрезков равны.*
2. *При сложении отрезков их длины складываются.*

После этого вводится понятие численного значения длины, показывающего сколько раз единичный отрезок и его доли укладываются в данном отрезке. Говорится, что после того как выбран единичный отрезок, длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Приводится способ измерения длины отрезка. Отмечается, что теоретически процесс измерения может продолжаться неограниченно. Практически же он всегда оканчивается, как только мы достигаем нужной точности. Вопрос о соизмеримости и несоизмеримости отрезков не рассматривается.

Таким образом, понятие длины отрезка в учебнике [4] носит автономный характер. Оно не входит в понятие равенства отрезков, которое определяется аксиоматически.

Отметим, что в отличие от ранее рассмотренных учебников здесь длина является геометрической величиной. Она характеризует протяженность. У нее имеется численное значение. Но сама она не является числом. Что же такое геометрическая величина и что такое длина остается не до конца понятным.

Оформим все вышесказанное в виде таблицы.

1	2	3	4
Определяются действия над отрезками. Длина отрезка – число. Единица измерения – отрезок. Вводится как результат измерения. Понятие длины автономно и не затрагивает оснований. Рассматриваются соизмеримость и несоизмеримость.	Действия над отрезками не определяются. Длина отрезка – число. Единица измерения– отрезок. Вводится аксиоматически. Понятие длины входит в определение равенства отрезков. Соизмеримость и несоизмеримость не рассматриваются.	Определяется только сравнение отрезков. Длина отрезка – число. Единица измерения– отрезок. Вводится описательно. Понятие длины автономно и не затрагивает оснований. Соизмеримость и несоизмеримость не рассматриваются.	Определяются действия над отрезками. Длина отрезка – геометрическая величина. Единица измерения– отрезок. Вводится аксиоматически. Понятие длины автономно и не затрагивает оснований. Соизмеримость и несоизмеримость не рассматриваются.

Выскажем нашу точку зрения, реализованную в учебнике [5]. Наиболее близким к нам является способ изложения, предложенный в учебнике [1].

Нам представляется целесообразным рассмотрение операций над отрезками и углами вначале изучения геометрии. Это формирует представления о том, что алгебраические операции можно производить не только с числами, но и с объектами другой природы. Наглядность операций над отрезками помогает не только геометрии, но и алгебре.

Действительные числа и бесконечные десятичные дроби по сравнению с отрезками являются гораздо более сложными объектами и их изучение должно быть отнесено на старшие классы.

Измерение длин отрезков и величин углов в 7-ом классе должно быть описательным и носить автономный характер, не затрагивающим основания геометрии. Под длиной отрезка можно понимать как число, показывающее сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке, так и сам данный отрезок. Например, когда мы говорим о длине ломаной, имеется в виду отрезок, равный сумме ее сторон.

Конечно, смешение понятий отрезка и его длины является не вполне корректным. Более точным является использование понятия геометрической величины, характеризующей протяженность отрезка

[4]. В этом смысле длина отрезка – то общее, что характеризует равные отрезки. Иначе говоря, *длина отрезка – это класс равных отрезков, содержащий данный отрезок.* Это строгое математическое определение длины отрезка, как геометрической величины, не использующее понятие действительного числа. Однако, в таком виде использование его в школьном курсе геометрии затруднительно. В учебнике [4] предпринята попытка именно такого подхода к определению длины отрезка. Нам не кажется эта попытка слишком удачной.

Разница между учебниками [1] и [5] состоит в том, что в учебнике [5] операции над отрезками используются для аксиоматического определения равенства отрезков, а в учебнике [1] для этого используется наложение.

Различные подходы к определению понятия длины отрезка накладывают отпечаток и на доказательства отдельных теорем. Рассмотрим, например, теорему о пропорциональных отрезках. Это одна из наиболее трудных теорем курса геометрии.

В учебнике [1] утверждение этой теоремы содержится в следующей лемме, которая изучается в 9-ом классе.

Лемма. *Прямая DE, параллельная какой-нибудь стороне AC треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBE, подобный данному.*

Доказательство занимает две страницы и проводится рассмотрением случаев, когда стороны *AB* и *DB* имеют общую меру и когда они не имеют общей меры. В последнем случае используются десятичные приближения и бесконечные десятичные дроби.

В учебнике [2] эта теорема изучается в начале восьмого класса после свойств параллелограмма и формулируется в следующем виде.

Теорема. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.*

Доказательство занимает две страницы и содержит два случая: случай, когда имеется общая мера отрезков и общий случай (не для запоминания). В общем случае доказательство проводится от противного и не используются десятичные дроби.

В учебнике [3] теорема о пропорциональных отрезках отдельно не формулируется, а содержится в первом признаке подобия треугольников, который изучается в середине 8-го класса.

Теорема. *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.*

Доказательство пропорциональности сторон использует теорему об отношении площадей подобных треугольников, доказанную ранее. В свою очередь, доказательство этой теоремы использует еще одну теорему о площадях треугольников с одним равным углом.

Десятичные дроби здесь спрятаны в выводе формулы площади квадрата. Конечно, такое доказательство не является полным, поскольку при изучении понятия площади многие свойства не доказываются. Например, существование площади или что формула площади треугольника не зависит от выбора основания.

В учебнике [4] теорема о пропорциональных отрезках формулируется для частного случая прямоугольных треугольников и изучается в середине 8-го класса.

Теорема (*об отношении перпендикуляра к наклонной*). *Пусть из точки B, лежащей на стороне p острого угла A, опущен перпендикуляр BC на сторону q угла A. Тогда отношение перпендикуляра BC к наклонной BA не зависит от выбора точки B.*

Доказательство основывается на свойствах площади и формуле площади треугольника. Поэтому оно, так же, как и в учебнике [3], не является полным.

В учебнике [5] сначала, используя свойство средней линии трапеции, доказывается теорема Фалеса.

Теорема Фалеса. *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

Затем определяется понятие отношения двух отрезков. Отношением AB/CD двух отрезков AB и CD называется число, показывающее сколько раз отрезок CD и его части укладываются в отрезке AB. Если отрезок CD принять за единичный, то отношение AB/CD будет равно длине отрезка AB. Говорят, что отрезки AB, CD, ... пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1, ..., если равны отношения AB/A_1B_1, CD/C_1D_1, ...

После этого формулируется теорема о пропорциональных отрезках.

Теорема. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.*

Доказательство. Пусть стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и E, F. Докажем, что имеет место равенство

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}.$$

Заметим, что отношение AB/AE показывает сколько раз отрезок AE укладывается в отрезке AB, а отношение AC/AF показывает сколько раз отрезок AF укладывается в отрезке AC. Теорема Фалеса позволяет установить соответствие между процессами измерения отрезков AB и AC. Действительно, прямые параллельные BC переводят равные отрезки на прямой AB в равные отрезки на прямой

AC. Отрезок AE переходит в отрезок AF. Одна десятая часть отрезка AE переходит в одну десятую часть отрезка AF и т.д. Поэтому, если отрезок AE укладывается в отрезке AB k раз, то отрезок AF будет укладываться в отрезке AC также k раз.

Таким образом, здесь не используются ни бесконечные десятичные дроби, ни свойства и формулы площади плоских фигур.

Подводя итог, можно сказать, что нет универсального способа изучения темы «Измерение длин отрезков». В каждом из них есть свои достоинства и недостатки. Важно найти разумное сочетание наглядности и строгости изложения. Проблема выбора того или иного способа остается за учителем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев А.П. Геометрия. Учебник для 6-9 классов семилетней и средней школы. – М.: Учпедгиз, 1962.

2. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 7-11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1991.

3. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 7-9. Учебник для 7-9 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1990.

4. Александров А.Д. и др. Геометрия. Учебник для 7-9 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1992.

5. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Учебник для 7-9 классов средней школы. – М.: Мнемозина, 2005.