И.М.Смирнова, В.А.Смирнов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОТРЕЗКАМИ И УГЛАМИ

Математика в школе 2001 № 7

Одним из основных вопросов, возникающих при построении курса геометрии для школы, является вопрос об определении понятия равенства фигур и в том числе понятия равенства отрезков и углов. В разных учебниках геометрии ответ на этот вопрос дается по-разному. Так, в учебнике геометрии А.П.Киселева и следующем ему учебнике геометрии Л.С.Атанасяна и др. равенство фигур определяется с помощью наложения. В учебнике геометрии А.В.Погорелова равными называются отрезки, имеющие равные длины, а равными углами – углы, имеющие равную градусную величину.

И тот и другой способы не свободны от недостатков. Хотя понятие наложения и является довольно наглядным, тем не менее его использование в доказательствах оказывается весьма затруднительным для учащихся. Попытки же уточнить этот термин приводят к чрезвычайно сложной аксиоматике.

В учебнике А.В.Погорелова предложен альтернативный способ определения равенства без участия понятия наложения. Однако его недостатком является использование с самого начала понятий действительного числа и расстояния. Так, например, аксиома III этого учебника утверждает, что «каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.»

Заметим, что к этому времени учащиеся знакомы только с рациональными числами. Поэтому у них может сложиться представление о том, что длины отрезков выражаются рациональными числами, а это совершенно неверно.

Аналогичным образом обстоит дело и с углами. В качестве аксиомы принимается утверждение о том, что «каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами».

Следует сказать, что понятие действительного числа является чрезвычайно сложным. Его обоснование выходит за рамки школьного курса математики. Кроме того, использование понятия дествительного числа неоправданно сводит геометрию к алгебре, затрудняя понимание геометрии.

Здесь мы рассмотрим способ построения курса геометрии, предложенный в учебнике геометрии И.М.Смирновой, В.А.Смирнова, который выйдет в издательстве «Просвещение» в 2000 г. Его главное отличие состоит в том, что равенство отрезков и углов определяется аксиоматически без использования понятий расстояния и наложения.

В некотором смысле изложение геометрии в этом учебнике возвращается к истокам, когда геометрия строилась без использования чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Более того, сами числа представлялись отрезками, среди которых были соизмеримые и несоизмеримые. Для отрезков (чисел) вводились отношение сравнения и операции сложения, вычитания, умножения на натуральное число. Доказывались свойства этих операций. Строилась алгебра отрезков.

Курс геометрии, указанного выше учебника И.М.Смирновой, В.А.Смирнова, построен на аксиоматической основе. Первые аксиомы в нем носят общий характер и относятся к понятию принадлежности.

Через любые две точки проходит единственная прямая.

Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой и точки, ей не принадлежащие.

Одним из основных отношений взаимного расположения точек на прямой берется отношение *лежать между*. Точки на прямой могут лежать между двумя данными точками на этой прямой или не лежать между ними. Если точка O лежит между точками A и B, то в этом случае говорят также, что точки A и B лежат на прямой по разные стороны от точки O. В противном случае говорят, что точки A и B лежат на прямой по одну сторону от точки O.

В качестве аксиом взаимного расположения точек на прямой принимаются следующие свойства.

Из трех точек на прямой только одна лежит между двумя другими.

Каждая точка на прямой разбивает эту прямую на две части так, что точки из разных частей лежат по разные стороны от данной точки, а точки из одной части лежат по одну сторону от данной точки.

Часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком.* При этом сами данные точки называются *концами отрезка*.

Отрезок обозначается указанием его концов. Например, AB, C_1D_1 и т. д. Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать отрезки малыми латинскими буквами. Например, a, b, c и т. д.

Часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от нее по одну сторону, называется *полупрямой* или *лучом*. При этом сама данная точка называется *началом* или *вершиной луча.*

Для обозначения лучей используются пары больших латинских букв, например, AB, первая из которых обозначает начало луча, а вторая - какую-нибудь точку принадлежащую лучу. Там, где это не вызывает недоразумений, будем обозначать лучи малыми латинскими буквами. Например, a, b, c и т. д.

Заметим, что обозначение отрезка совпадает с обозначением луча. Поэтому, чтобы не возникало недоразумений следует оговаривать, о чем идет речь в том или ином случае - луче или отрезке.

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция *откладывания данного отрезка* на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется равным исходному отрезку. Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB=A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например AB, отложить на луче A_1B_1 от точки A_1, то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1.

Если при откладывании отрезка AB на луче A_1B_1 от точки A_1 точка B переходит в точку, лежащую между точками A_1, B_1, то говорят, что отрезок AB меньше отрезка A_1B_1 и обозначают $AB < A_1B_1$. Говорят также, что отрезок A_1B_1 больше отрезка AB и обозначают $A_1B_1 > AB$.

Если на отрезке AB между точками A и B взять какую-либо точку C, то образуется два новых отрезка AC и CB. Отрезок AB называется *суммой отрезков* AC и CB и обозначается $AB = AC + CB$. Каждый из отрезков AC и CB называется *разностью* отрезка AB и другого отрезка, обозначается $AC = AB - CB$, $CB = AB - AC$.

Чтобы сложить два произвольных отрезка AB и CD, продолжим отрезок AB за точку B и на этом продолжении отложим отрезок BE, равный CD. Отрезок AE даст сумму отрезков AB и CD,

$$AE = AB + CD.$$

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего отрезка меньшего.

Следующие свойства, относящиеся к понятию равенства отрезков, принимаются за аксиомы.

Каждый отрезок равен самому себе.

Если два отрезка равны третьему, то они равны между собой.

На любом луче от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному.

Отрезки, полученные сложением или вычитанием соответственно равных отрезков, равны.

Используя операцию сложения отрезка с самим собой можно определить операцию умножения отрезка на натуральное число. А именно, положим для отрезка AB

$$2AB = AB + AB,\ 3AB = 2AB + AB,\ \dots,\ nAB = (n-1)AB + AB,\ \dots .$$

Определим также операцию *деления отрезка* на натуральное число, или, что то же самое, операцию деления отрезка на n равных частей, считая $AB:n$ отрезком, при умножении которого на n получается исходный отрезок AB, т. е. $n(AB:n) = AB$.

Примем в качестве аксиомы следующее утверждение.

Любой отрезок можно разделить на n равных частей, $n = 2,3, \dots$.

Для закрепления этих аксиом учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Изобразите на прямой точки A, B, C, D так, чтобы

а) точка C лежала бы между точками A и B, а точка D лежала бы между точками B и C;

б) точка A лежала бы между точками B и C, а точка C между точками A и D.

2. Для точек A, B, C, D прямой известно, что точки B и C лежат по одну сторону от точки A, точки B и D тоже лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки C и D относительно точки A? Сделайте соответствующий рисунок.

3. Сколько лучей, расположенных на данной прямой, могут иметь данную точку в качестве своей вершины?

4. Укажите случаи взаимного расположения двух лучей на прямой.

5. На отрезке AB взята точка C. Среди лучей AB, AC, CA, CB назовите пары совпадающих лучей.

6. Объясните, почему любые две точки луча лежат по одну сторону от его вершины.

7. Назовите все лучи, образовавшиеся при пересечении двух прямых AB и CD в точке O.

8. На отрезке AB взята точка C. Какой отрезок больше AB или AC? Почему?

9. На луче AB отложен отрезок AC меньший AB. Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими.

10. На прямой отмечены точки A, B, C, D. Запишите каждый из отрезков в виде суммы или разности остальных.

11. Для данных отрезков AB и $CD < AB$ постройте отрезки: а) $AB + CD$; б) $AB - CD$.

12. Для данного отрезка AB постройте отрезки: а) $2AB$; б) $3AB$; в) $4AB$.

13. Докажите, что для операций сложения отрезков справедливы свойства, аналогичные свойствам сложения положительных чисел:

1. $a + b = b + a$ (переместительное свойство);

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательное свойство);

3. если $a < b$, то $a + c < b + c$.

После введения аксиом о равенстве отрезков рассмотрим вопрос о способе измерения длины отрезка, основанном на сравнении его с единичным отрезком.

Длина отрезка – это положительное число, показывающее сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в этом отрезке.

Для измерения длины данного отрезка AB последовательно откладывают единичный отрезок от его начала - точки A. Если при этом единичный отрезок целиком укладывается в отрезке AB n раз без остатка, то процесс измерения на этом заканчивается и полученное число n

считается длиной отрезка *AB*. Если же единичный отрезок целиком укладывается в отрезке *AB* *n* раз с остатком, т. е. конец последнего единичного отрезка *C* не совпадает с концом отрезка *AB*, и остаток *CB* меньше единичного отрезка, то число *n* считается приближенным значением длины отрезка (с точностью 1). В этом случае единичный отрезок разбивается на 10 равных частей. От точки *C* откладывают одну десятую часть единичного отрезка и находят число *m*, показывающее сколько раз она укладывается в отрезке *CB*. Если при этом конец последнего отрезка совпадет с концом отрезка *CB*, то процесс измерения заканчивается и число, выражаемое десятичной дробью *n,m* считается длиной отрезка *AB*. Если же конец последнего отрезка не совпадает с концом отрезка *CB*, то число *n,m* считается приближенным значением длины отрезка (с точностью 0,1). В этом случае одна десятая часть единичного отрезка разбивается на десять равных частей, и повторяется описанная процедура.

В результате процесс измерения может на некотором шаге закончится. В этом случае длина отрезка будет выражаться конечной десятичной дробью. Однако, может случиться, что процесс измерения не заканчивается ни на каком шаге. В этом случае длина отрезка будет выражаться бесконечной десятичной дробью.

Единичный отрезок можно разбивать не только на 10, но и на другое число частей. Так если единичный отрезок разбит на *q* равных частей, и одна такая часть укладывается в отрезке *AB* ровно *p* раз, то длина отрезка *AB* считается равной дроби *p*/*q*.

Тем не менее, здесь не утверждается, что каждый отрезок имеет определенную длину и что из равенства длин следует равенство отрезков. Для этого нужна аксиома непрерывности или один из ее вариантов. Введение этой аксиомы отнесено к теме “Координаты и векторы”.

Важно, чтобы учащиеся представляли себе, что есть отрезки, длина которых выражается конечной десятичной дробью или дробью *p*/*q*, а также могут быть отрезки, длина которых не выражается рациональными числами.

В связи с этим, понятия расстояния и длины отрезка в дальнейшем используется в двух смыслах: как число, если оно определено, и как сам отрезок, в случае если его длина представляет собой иррациональное число. Так, например, радиус окружности может пониматься или как число или как отрезок.

Для закрепления этого материала учащимся можно предложить следующие задачи.

1. Точка *C* лежит на прямой между точками *A* и *B*. Найдите длину отрезка *AB*, если: а) *AC* = 2,5 см, *CB* = 3,5 см; б) *AC* = 3,1 дм, *CB* = 4,6 дм; в) *AC* = 12,3 м, *CB* = 5,8 м.

2. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

3. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если $AC = 3$ см, $BC =5$ см?

4. Могут ли точки A, B, C лежать на одной прямой, если $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см.

5. Могут ли точки A, B, C лежать на одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC?

6. С помощью линейки измерьте указанные на рисунке отрезки.

7. Используя линейку, нарисуйте отрезки длиной: а) 6 см; б) 18 мм; в) 1,1 дм: г) 0,08 м.

8. На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если: а) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC; б) отрезок АС в два раза длиннее отрезка BC; в) длины отрезков AC и BC относятся как 2:3.

9. На данной прямой от данной точки отложите на глаз отрезки равные: а) 3 см; б) 7 см; в) 10 см. Проверьте точность построений линейкой.

10. На прямой последовательно отложены три отрезка: AB, BC и CD так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

11. От точки A, взятой на некоторой прямой, отложены на ней в одном направлении два отрезка AB и AC, причем $AB = 60$ мм, $AC = 100$ мм. Найдите: а) длину отрезка BC; б) расстояние от точки A до середины отрезка BC; в) расстояние между серединами отрезков AB и AC.

12. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма которых равна 28 см; конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго - серединой третьего. Найдите длины этих отрезков.

Следующее свойство принимается в качестве аксиомы взаимного расположения точек на плоскости относительно данной прямой.

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части, для точек которых говорят, что они лежат по разные стороны от данной прямой. При этом, если две точки, принадлежат разным частям плоскости относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Часть плоскости, состоящую из точек данной прямой и точек, лежащих по одну сторону от этой прямой, называется *полуплоскостью*.

Два луча с общей вершиной так же разбивают плоскость на две части. Если лучи не лежат на одной прямой, то меньшая из этих частей является общей частью двух полуплоскостей, определяемых данными лучами.

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется *углом*. Общая вершина называется *вершиной угла*, а сами лучи - *сторонами угла*. Точки угла, не лежащие на его сторонах, называются *внутренними*. Лучи, исходящие из вешины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются внутренними.

Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину или тремя буквами средняя из которых указывает вершину угла, а крайние - какие-нибудь точки на сторонах угла. Например, $\angle A$, $\angle AOB$ и т. д. Иногда угол обозначается цифрой, например, $\angle 1$, $\angle 2$ и т. д.

Угол называется *развернутым*, если его лучи вместе составляют прямую. В противном случае угол называется *неразвернутым.*

Неразвернутый угол может быть меньше развернутого, т. е. являться частью развернутого угла, или быть больше развернутого, т. е. содержать развернутый угол. Как правило, если не оговорено противное, рассматривают углы, меньшие развернутых.

Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла.

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция *откладывания данного угла* в ту или другую сторону от данного луча. Получающийся при этом угол называется равным исходному углу. Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например AOB, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1, то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

Если при откладывании угла AOB на луче $A_1O_1B_1$ от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч, лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$ и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$. Говорят также, что угол $A_1O_1B_1$ больше угла AOB и обозначают $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$.

Если внутри угла AOB провести луч OC, то образуется два новых угла AOC и COB. Угол AOB называется *суммой углов* AOC и COB и обозначается

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Каждый из углов AOC и COB называется *разностью* угла AOB и другого угла, обозначается

$$\angle AOC = \angle AOB - \angle COB, \ \angle COB = \angle AOB - \angle AOC.$$

Чтобы сложить два угла, например AOB и CO_1D, отложим угол CO_1D от луча OB так, чтобы точки B и D находились по разные стороны от прямой *OB*. Обозначим *OE* луч, в который перейдет луч O_1D. Тогда угол *AOE* даст сумму углов *AOB* и CO_1D,

$$\angle AOE = \angle AOB + \angle CO_1D.$$

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего угла меньшего.

Аксиомами, относящимися к понятию равенства углов являются следующие:

Каждый угол равен самому себе.

Если два угла равны третьему, то они равны между собой.

От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол равный данному.

Углы, полученные сложением или вычитанием соответственно равных углов, равны.

Все развернутые углы равны.

Используя эти аксиомы, докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Вертикальные углы равны.

Доказательство. Пусть *AOC* и *BOD* - вертикальные углы. Стороны *OB* и *OD* угла *BOD* дополняют до прямых стороны *OA* и *OC* угла *AOC*. Тогда углы *AOC* и *COB* составляют в сумме развернутый угол. Углы *BOD* и *COB* также составляют в сумме развернутый угол. Поскольку все развернутые углы равны, то имеем равенство $\angle AOC+\angle COB=\angle BOD+\angle COB$. Вычитая из обеих частей этого равенства $\angle COB$, получаем требуемое равенство $\angle AOC=\angle BOD$.

(Это первая теорема и первое доказательство. В дальнейшем будет много теорем и доказательств. Ученикам нужно постараться понять доказательство. Выученное доказательство не означает его понимание. Важны не сами слова а их смысл. Один и тот же смысл может выражаться различными словами. Например, теорему о равенстве вертикальных углов можно переформулировать в виде: если два угла являются вертикальными, то они равны. Это тоже правильная формулировка. Для того, чтобы проверить понимание доказательства нужно чаще задавать вопрос: почему?)

Для закрепления этого материала учащимся можно предложить следующие задачи.

1. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся прямые, три попарно пересекающиеся прямые.

2. Даны прямая и три точки *A, B, C,* не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок *AB* пересекает прямую, а отрезок *AC* не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок *BC*?

3. Даны прямая и четыре точки *A, B, C, D,* не лежащие на этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок *AD*, если: а) отрезки *AB, BC* и *CD* пересекают прямую; б) отрезки *AC* и *BC* пересекают прямую, а отрезок

BD не пересекает; в) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; г) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; д) отрезки AB, BC и CD не пересекают прямую; е) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую?

4. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости, а две другие - в другой полуплоскости относительно этой прямой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков пересекает прямую?

5. Точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Известно, что прямая AB пересекает отрезок CD, а прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

6. Изобразите лучи OA, OB, OC, OD так, чтобы

а) луч OC лежал бы внутри угла AOB, а луч OD лежал бы внутри угла BOC;

б) луч OA лежал бы внутри угла BOC, а луч OC лежал бы внутри угла AOD.

7. Докажите, что если два угла равны, то равны и смежные с ними углы.

8. Какой угол образуют биссектрисы двух вертикальных углов?

9. Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

10. Докажите переместительное свойство сложения углов.

11. Докажите сочетательное свойство сложения углов.

12. Докажите, что если $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ и $\angle COB < \angle C_1O_1B_1$, то $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$.

Измерение величин углов аналогично измерению длин отрезков. Учащимся можно предложить следующие упражнения.

1. С помощью транспортира измерьте величины указанных на рисунке углов.

2. С помощью транспортира постройте углы, величиной 10^o, 30^o, 60^o, 90^o, 120^o.

3. Оцените "на глаз" градусную величину углов, указанных на рисунке. Проверьте ваши оценки, измерив углы с помощью транспортира.

4. Луч OC лежит внутри угла AOB. Найдите градусную величину угла AOB, если: а) $\angle AOC = 35^o$, $\angle COB = 75^o$; б) $\angle AOC = 75^o$, $\angle COB = 62^o$; в) $\angle AOC = 94^o$, $\angle COB = 85^o$.

5. Может ли луч OC лежать внутри угла AOB, если: $\angle AOC = 30^o$, $\angle COB = 80^o$; б) $\angle AOB = 50^o$, $\angle AOC = 100^o$; в) $\angle AOC > \angle AOB$?

6. Луч OC лежит внутри угла AOB, равного 60^o. Найдите углы AOC и BOC, если: а) угол AOC на 30^o больше угла BOC; б) угол AOC в два раза больше угла BOC; в) градусные меры углов AOC и BOC относятся как 2:3.

7. Некоторый угол равен 38^o. Чему равен смежный с ним угол.

8. Могут ли два смежных угла быть оба: а) острыми; б) тупыми; в) прямыми?

9. Какую часть прямого угла составляют углы, равные: а) 45°; б) 30°; в) 10°; г) 18°; д) 72°; е) 150°.

10. Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

11. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 30° больше другого; б) их разность равна 40°; в) один из них в три раза меньше другого; г) они равны.

12. Найдите смежные углы, если их градусные величины относятся как: а) 2:3; б) 3:7; в) 11:25; г) 22:23.

13. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?

14. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

15. Сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306°. Найдите эти углы.

16. Может ли сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, быть равной 150°?

17. Разность двух смежных углов равна 90°. Найдите величину этих углов.

18. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в 3 ч, 6 ч, 9 ч, 5 ч.

19. На сколько градусов повернется минутная стрелка за: а) 20 минут; б) 10 минут.

20. На сколько градусов повернется часовая стрелка за: а) 2 часа; б) 15 мин.; в) 30 сек.?

Нашим глубоким убеждением является то, что аксиоматический курс геометрии не является трудным для понимания школьников. Аксиомы можно рассматривать как правила игры в геометрию. Если правила четко определены, то играть по ним легче, чем при отсутствии правил. Такое построение характерно не только для геометрии. Каждая наука имеет свои определенные правила. В жизни часто приходится иметь дело с теми или иными правилами. Например, различные игры (шахматы и др) основываются на некоторых правилах. При работе с компьютером руководствуются определенными правилами. Свод законов, регулирующих деятельность человека в той или иной области, также представляет собой набор правил.