И.М. Смирнова, *В.А. Смирнов*

Об определении многогранника

Многогранники имеют тысячелетнюю историю. Первые упоминания о многогранниках встречаются ещё у египтян и вавилонян за 3000 лет до нашей эры. В то же время теория многогранников – современный раздел математики. Глубокие результаты в ней получены отечественными математиками, академиками: Б. Н. Делоне, А. Д. Александровым, А. В. Погореловым и др.

Теория многогранников тесно связана со многими другими разделами современной математики: топологией, теорией графов. Она имеет большое значение не только для теоретических исследований по геометрии, но и для областей прикладной математики – линейного программирования, теории оптимального управления и др.

Многогранники интересны и сами по себе. Они имеют красивые формы, например правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники. Они обладают богатой историей, связанной с такими знаменитыми учёными древности, как Пифагор, Евклид, Архимед и др.

В природе форму многогранников имеют кристаллы. Свойства кристаллов определяются особенностями их геометрического строения, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решётке. Формы многогранников используются в архитектурных сооружениях.

В различных школьных учебниках геометрии даются различные определения понятия многогранника.

В школьных учебниках геометрии *многогранником* называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно *рёбрами* и *вершинами* многогранника.

При этом понятия тела и его поверхности нуждаются в уточнении. Хотя они имеют наглядный смысл, их строгое определение довольно сложно и использует начальные понятия такого раздела математики, как топология. К ним относятся: внутренняя, внешняя и граничная точки, внутренность, граница, открытость, замкнутость, связность, ограниченность. Рассмотрим эти понятия и их свойства более подробно.

Точка A называется *внутренней точкой* фигуры Φ, если существует шар с центром в точке A, целиком содержащийся в фигуре Φ (рис. 27.1).

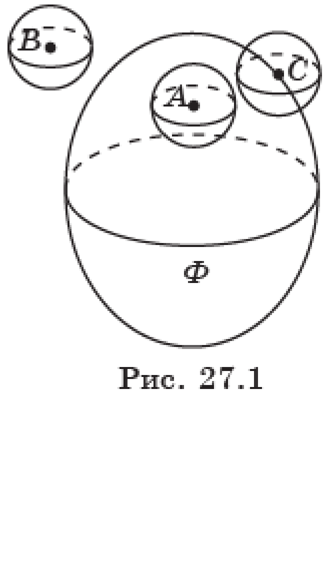

Рис. 27.1

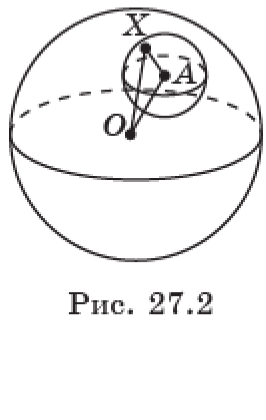

Рис. 27.2

Точка B называется называется *внешней точкой* фигуры Φ, если существует шар с центром в точке B, не содержащий точек фигуры Φ (рис. 27.1).

Точка C называется *граничной точкой* фигуры Φ, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой этой фигуры, т. е. в любом шаре с центром в точке C имеются как точки фигуры Φ, так и точки, не принадлежащие фигуре Φ (рис. 27.1).

Итак, для любой точки по отношению к фигуре Φ есть только три возможности: быть внутренней, внешней или граничной точкой.

Внутренностью фигуры Φ называется фигура, состоящая из всех её внутренних точек. Будем обозначать её $вн(\Phi)$. Ясно, что фигура $вн(\Phi)$ содержится в фигуре Φ.

Фигура Φ называется *открытой*, если она совпадает со своей внутренностью, т. е. $\Phi = вн(\Phi)$. Таким образом, у открытой фигуры все точки являются внутренними.

В качестве примера рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, удалённых от данной точки O на расстояние меньшее R. Обозначим её $U(O, R)$ и докажем, что она является открытой. Для этого нужно доказать, что каждая её точка является внутренней.

Пусть A – произвольная точка фигуры $U(O, R)$ (рис. 27.2).

Обозначим через d расстояние от A до O и рассмотрим шар V с центром в точке A и радиусом $r = \frac{1}{2}(R - d)$. Если точка X принадлежит этому шару, то расстояние от неё до A меньше или равно r и, следовательно, меньше $R - d$. В силу неравенства треугольника расстояние от X до O меньше или равно сумме расстояний от X до A и от A до O, т. е. меньше чем $R - d + d = R$. Это означает, что точка X принадлежит фигуре $U(O, R)$. Поскольку X – произвольная точка шара V, то V содержится в $U(O, R)$. Следовательно, A – внутренняя точка фигуры $U(O, R)$. Что и требовалось доказать.

Свойство 1. Объединение двух открытых фигур является открытой фигурой.

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 – открытые фигуры, Φ – их объединение. Если A принадлежит Φ, то она принадлежит или Φ_1, или Φ_2. Пусть, например, A принадлежит Φ_1. Из открытости фигуры Φ_1 следует, что существует шар с центром в этой точке и радиусом R_1 соответственно, целиком содержащийся в фигуре Φ_1. Но тогда этот шар будет содержаться и в объединении Φ, следовательно, точка A является внутренней точкой фигуры Φ. Поскольку A – произвольная точка фигуры Φ, то Φ – открытая фигура.

Свойство 2. Пересечение двух открытых фигур является открытой фигурой.

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 – открытые фигуры, Φ – их пересечение. Если точка A принадлежит Φ, то она принадлежит как Φ_1, так и Φ_2. Из открытости этих фигур следует, что существуют шары с центром в этой точке и радиусами R_1 и R_2 соответственно, целиком содержащиеся в этих фигурах. Обозначим через R наименьший из этих радиусов. Тогда шар с центром в точке A и радиусом R будет содержаться как в фигуре Φ_1, так и в фигуре Φ_2. Значит, он будет содержаться в пересечении Φ, следовательно, точка A является внутренней точкой фигуры Φ. Поскольку A – произвольная точка фигуры Φ, то Φ – открытая фигура.

Границей фигуры Φ называется фигура, состоящая из всех её граничных точек. Будем обозначать ее *гр*(Φ).

Фигура Φ называется *замкнутой*, если она содержит свою границу. Таким образом, замкнутая фигура содержит все свои граничные точки.

Нетрудно доказать, что сфера $S(O, R)$ с центром в точке O и радиусом R является границей фигуры $U(O, R)$, рассмотренной выше, а шар с центром в точке O и радиусом R является замкнутой фигурой.

Фигура Φ называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 27.3 представлены выпуклые (рис. 27.3, б, д) и невыпуклые многогранники (рис. 27.3, а, в, г).

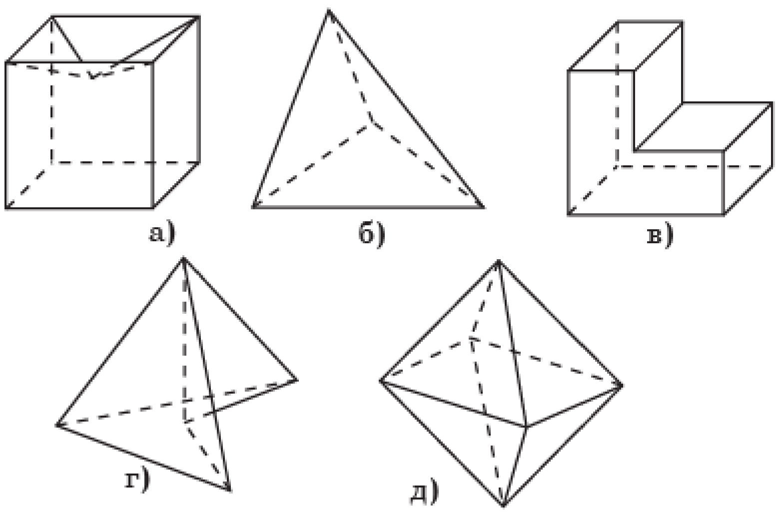

Рис. 27.3

Свойство 3. Пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 – выпуклые фигуры, Φ – их пересечение. Если точки A и B принадлежат Φ, то они принадлежат как Φ_1, так и Φ_2. Из выпуклости этих фигур следует, что в них содержится и отрезок AB. Следовательно, этот отрезок содержится и в пересечении этих фигур. Значит, пересечение фигур Φ_1 и Φ_2 является выпуклой фигурой.

Фигура Φ называется *линейно связной*, если любые две её точки можно соединить ломаной, целиком содержащейся в этой фигуре. Ясно, что выпуклая фигура связна.

Открытая связная фигура называется *областью*. Например, фигура $U(O, R)$, рассмотренная выше, является областью.

Фигура *Ф* называется *ограниченной*, если она целиком содержится в некотором шаре. Например, шар, куб являются ограниченными фигурами.

Наконец, дадим определения тела и его поверхности.

Телом называется ограниченная область вместе со своей границей. Граница тела называется его *поверхностью*.

На рисунке 27.4 представлены фигуры, являющиеся телами (рис. 27.4, а, б) и не являющиеся телами (рис. 27.4, в, г). Следовательно, фигуры на рисунках 27.4, а, б являются многогранниками, а на рисунках 27.4, в, г – нет.

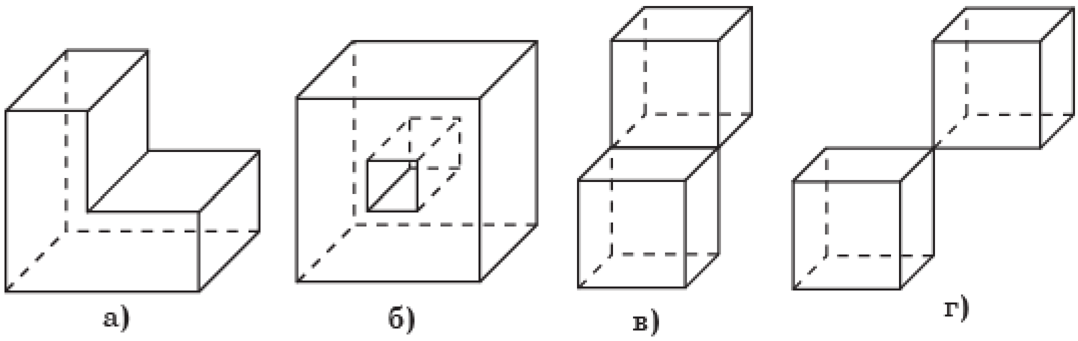

Рис. 27.4

Литература

1. Смирнова И. М. В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995. – С. 9-22.