# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ. 9 КЛАСС

**В.А. Смирнов,**
Московский педагогический государственный университет, e-mail: v-a-smirnov@mail.ru;
**И.М. Смирнова,**
Московский педагогический государственный университет, e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

**V.A. Smirnov,**
Moscow State Pedagogical University,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru;
**I.M. Smirnova,**
Moscow State Pedagogical University,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

**Ключевые слова:** экстремальные задачи по геометрии, 9 класс

**Keywords:** extreme geometry problems, 9-th grade

**Аннотация:** в работе рассматриваются задачи по геометрии на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), которые могут быть использованы при обучении геометрии в 9-м классе

**Abstract:** the paper deals with problems in geometry to find the largest and smallest values (extreme problems) that can be used when teaching geometry in the 9-th grade

**DOI:**

Данная статья является продолжением статей журнала «Математика в школе», в которых были представлены задачи на нахождение наибольших и наименьших значений для учащихся 7 и 8 классов.

Здесь мы рассмотрим экстремальные задачи по геометрии, которые могут быть использованы при обучении в 9-м классе на основных уроках, при проведении обобщающего повторения и курсов по выбору, организации проектной и исследовательской деятельности учащихся. Решения этих задач используют свойства и теоремы, которые, в основном, относятся к понятию площади плоской фигуры и её свойствам. В качестве дополнительной литературы, посвящённой экстремальным задачам, рекомендуем книги [1–6].

В последующих статьях будут рассмотрены аналогичные задачи для 10 и 11 классов.

Начнём с задач на нахождение наибольших значений, связанных с треугольником.

**Задача 1.** Из всех треугольников $ABC$ с двумя данными сторонами $BC = a$ и $AC = b$ найдите треугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь?

Р е ш е н и е 1. Из вершины $A$ треугольника $ABC$ проведём высоту $AH = h$ (рис. 1). Площадь треугольника $ABC$ равна $\frac{1}{2}a \cdot h.$ Она будет наибольшей, если эта высота совпадает со стороной $AC$ треугольника $ABC$, то есть если угол $C$ равен 90°. Следовательно, искомым треугольником является прямоугольный треугольника $ABC$ с катетами $AC = b$ и $BC = a$. Его площадь равна $\frac{1}{2}ab.$

Р е ш е н и е 2. Воспользуемся формулой площади $S$ треугольника

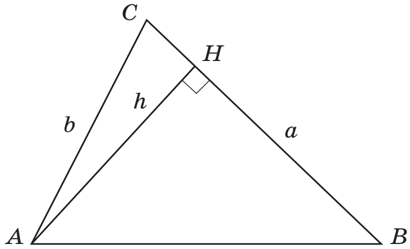



**Рис. 1**

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C.$$

Наибольшее значение синуса угла $C$, равное 1, принимается в случае, если угол $C$ равен 90°. Следовательно, искомым треугольником является прямоугольный треугольника $ABC$ с катетами $AC = b$ и $BC = a$ (рис. 2). Его площадь равна $\frac{1}{2}ab$.

**Задача 2.** Дана окружность с центром $O$ и радиусом $R$. Через данную точку $C$ проведите прямую, пересекающую данную окружность в точках $A$ и $B$, для которых площадь треугольника $AOB$ наибольшая (рис. 3). Чему равна эта площадь?

Решение. Построим окружность с центром в точке $O$ и радиусом $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Через точку $C$ проведём касательную к этой окружности. Обозначим $A$ и $B$ точки пересечения этой касательной с данной окружностью. Треугольник $AOB$ будет прямоугольным треугольником, катеты которого равны $R$. Следовательно, он будет искомым треугольником, имеющим наибольшую площадь. Она равна $\frac{R^2}{2}$ (рис. 4).

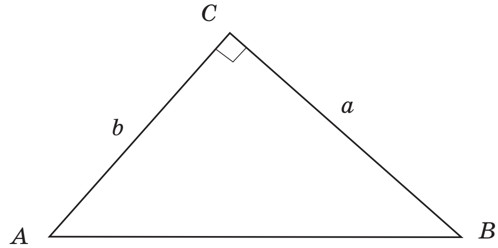



**Рис. 2**

В следующих задачах требуется найти треугольник наименьшего периметра.

**Задача 3.** Из всех треугольников $ABC$ с данной стороной $AB = a$ и данной площадью $S$ найдите треугольник наименьшего периметра (рис. 5).

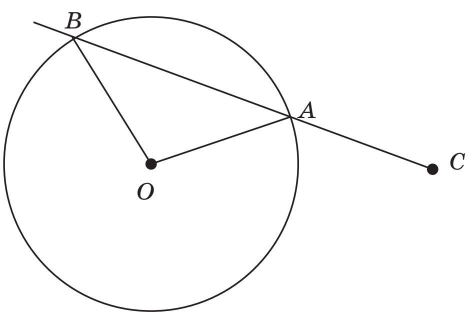



**Рис. 3**

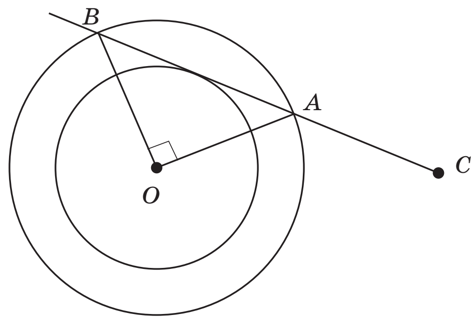



**Рис. 4**

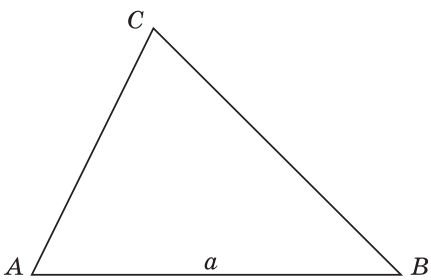



**Рис. 5**

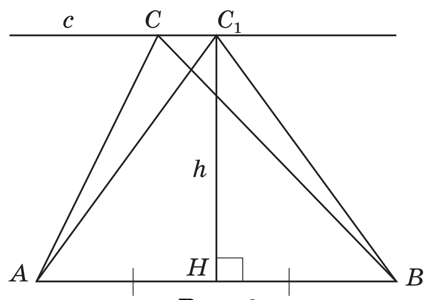



**Рис. 6**

Р е ш е н и е. Вершина $C$ треугольника $ABC$ с данной стороной $AB = c$ и данной площадью $S$ принадлежит прямой $c$, параллельной прямой $AB$ и удалённой от неё на расстояние $h = \frac{2S}{a}$ (рис. 6).

В силу задачи Герона, из всех таких треугольников наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник $ABC_1$ с основанием $AB = a$ и высотой $h = \frac{2S}{a}$.

**Задача 4.** Докажите, что из всех треугольников $ABC$ с данной площадью $S$ наименьший периметр может иметь только равносторонний треугольник (рис. 7).

Р е ш е н и е. Если какие-нибудь стороны треугольника $ABC$ не равны, например, $AC \neq BC$, то существует треугольник $ABC_1$ с такой же площадью, но меньшего периметра (рис. 8).

В следующих задачах рассматриваются треугольники, вписанные в окружность и описанные около окружности.

**Задача 5.** Из всех треугольников $ABC$ с данной стороной $AB = c$, вписанных в данную окружность, найдите треугольник наибольшей площади (рис. 9).

Р е ш е н и е. Если какие-нибудь две стороны треугольника $ABC$ не равны, например, $AC \neq BC$, то существует вписанный равнобедренный треугольник $ABC_1$ ($AC_1 = BC_1$) большей площади (рис. 10). Значит, искомым треугольником является равнобедренный треугольник.

**Задача 6.** Докажите, что из всех треугольников $ABC$, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь может иметь только равносторонний треугольник (рис. 11). Найдите эту площадь, если радиус окружности равен 1.

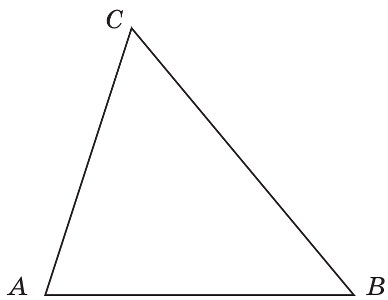



**Рис. 7**

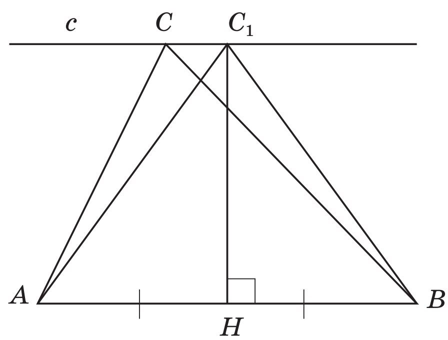



**Рис. 8**

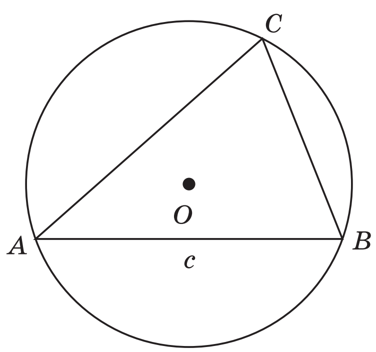



**Рис. 9**

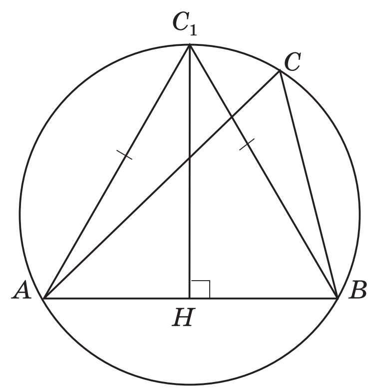



**Рис. 10**

Решение. Если какие-нибудь две стороны треугольника $ABC$ не равны, например, $AC \neq BC$, то существует вписанный равнобедренный треугольник $ABC_1$ ($AC_1 = BC_1$) большей площади (рис. 12). Следовательно, у треугольника, вписанного в окружность, имеющего наибольшую площадь, должны быть равны все стороны.

Если радиус окружности равен 1, то искомая площадь равностороннего треугольника равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

**Задача 7.** Через точку $C$, расположенную внутри данного угла $aOb$, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник $AOB$ наименьшей площади (рис. 13).

Решение. Обозначим $P$ точку, симметричную точке $O$ относительно центра $C$. Проведём через неё прямые, параллельные прямым $a$, $b$, и обозначим $B$, $A$ их точки пересечения соответственно с прямыми $b$, $a$. Получим параллелограмм $OAPB$ (рис. 14). Прямая $AB$ будет искомой прямой, отсекающей треугольник $AOB$ наименьшей площади. Для другой прямой $A'B'$, проходящей через точку $C$, одна из точек $A'$ или $B'$ не принадлежит отрезку $OA$ или $OB$ соответственно. Пусть, например, такой точкой является точка $A'$. Обозначим $A''$ точку пересечения прямой $CA'$ со стороной $AP$ параллелограмма. Площадь треугольника $A'OB'$ равна площади треугольника $AOB$ плюс площадь треугольника $A'AC$ минус площадь треугольника $B'BC$. Треугольник $B'BC$ симметричен треугольнику $A''AC$, который является частью треугольника $A'AC$. Следовательно, площадь треугольника $A'AC$ больше площади треугольника $B'BC$. Значит, площадь треугольника

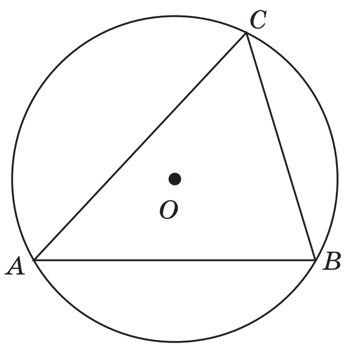


**Рис. 11**

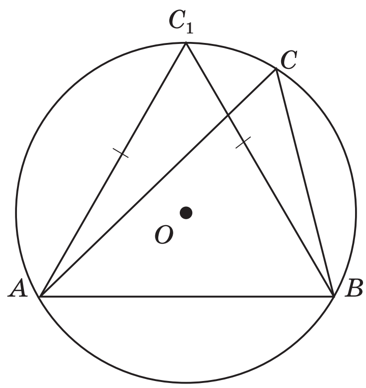


**Рис. 12**

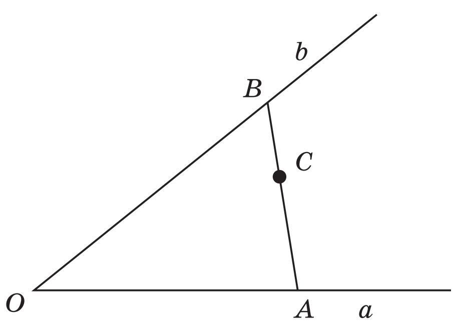


**Рис. 13**

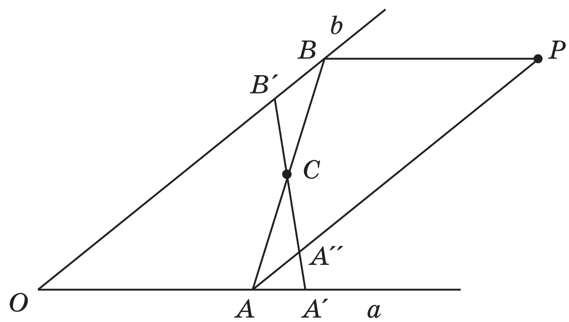


**Рис. 14**

*A’OB’* будет больше площади треугольника *AOB*.

**Задача 8.** В треугольнике *ABC* найдите точки, сумма расстояний от которых до прямых *AB*, *AC*, *BC* наименьшая (рис. 15).

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $S$ – его площадь. Для точки *D* этого треугольника обозначим расстояния от неё до прямых *BC*, *AC* и *AB* соответственно $h_a$, $h_b$ и $h_c$. Обозначим $h$ расстояние от точки *A* до прямой *BC* (рис. 16). Заметим, что имеют место равенства $a \cdot h = a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c = 2S$. Рассмотрим возможные виды треугольника *ABC*.

1. *ABC* – равносторонний треугольник. Тогда $a(h_a + h_b + h_c) = a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c = a \cdot h$. Следовательно, $h_a + h_b + h_c = h$. Значит, сумма расстояний от точки *D* до прямых *AB*, *AC*, *BC* не зависит от положения точки *D* и равна $h$.

2. *ABC* – равнобедренный треугольник, для которого $a = b > c$. Тогда для точки *D*, принадлежащей стороне *AB*, имеем: $h_c = 0$, $a(h_a + h_b + h_c) = a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c = a \cdot h$. Следовательно, $h_a + h_b + h_c = h$. Для точек *D* треугольника *ABC*, не принадлежащих стороне *AB*, имеем: $h_c = 0$, $a(h_a + h_b + h_c) > a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c = a \cdot h$. Следовательно, $h_a + h_b + h_c > h$. Значит, искомое наименьшее значение принимается во всех точках стороны *AB* треугольника *ABC*.

3. *ABC* – треугольник, для которого $a > b$, $a > c$. Тогда для точки *D* треугольника *ABC*, отличной от точки *A*, имеем: $a(h_a + h_b + h_c) > a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c = a \cdot h$. Следовательно, $h_a + h_b + h_c > h$. Значит, искомое наименьше значение принимается в вершине *A* треугольника *ABC*.

Перейдём теперь к задачам на нахождение наибольших площадей четырёхугольников. Начнём с классической задачи о нахождении прямоугольника данного периметра наибольшей площади.

**Задача 9.** Из всех прямоугольников данного периметра *P* найдите прямоугольник наибольшей площади.

Данную задачу можно переформулировать как задачу с практическим содержанием.

Какую форму должен иметь прямоугольный участок земли, чтобы при данном периметре он был наибольшей площади.

Решение 1. Докажем, что искомым прямоугольником является квадрат. Рассмотрим квадрат *ABCD* и прямоугольник *AEFH* с тем же периметром (рис. 17). Докажем, что площадь прямоугольника меньше площади квадрата.

Площадь квадрата равна сумме площадей прямоугольников *ABGH* и *HGCD*. Площадь прямоугольника равна сумме площадей прямоугольников *ABGH* и *BEFG*. Из равенства периметров прямоугольника и квадрата следует равенство сторон *BE* и *HD*. Так как $BG < HG$, то площадь прямоугольника *BEFG* меньше

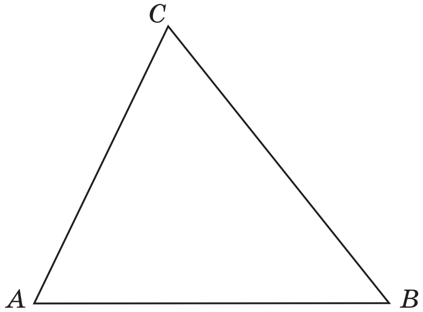



**Рис. 15**

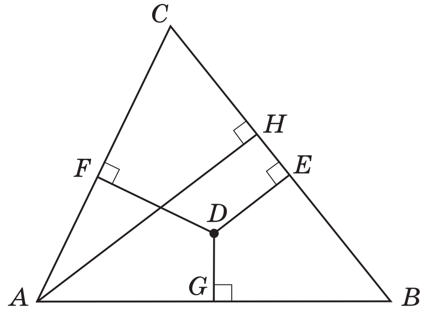



**Рис. 16**

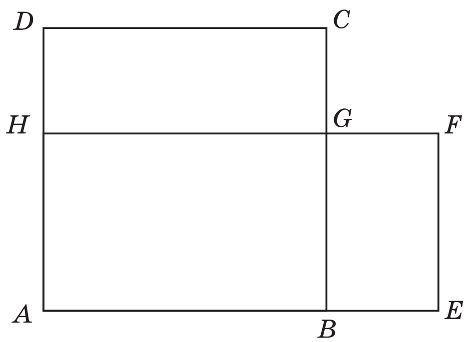



**Рис. 17**

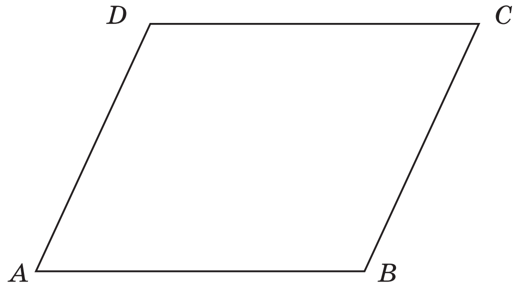



**Рис. 18**

площади прямоугольника $HGCD$, следовательно, площадь прямоугольника $AEFH$ меньше площади квадрата $ABCD$.

Р е ш е н и е 2. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ $AB = a$, $AD = b$, $a + b = \frac{P}{2}$. Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2},$$

которое выполняется для неотрицательных чисел $a$, $b$. Это неравенство превращается в равенство только, если $a = b$. Наибольшее значение площади $S = a \cdot b$ принимается, если $a = b = \frac{P}{4}$. Следовательно, искомым прямоугольником наибольшей площади является квадрат.

**Задача 10.** Из всех параллелограммов $ABCD$ с данным периметром и данным острым углом найдите параллелограмм наибольшей площади (рис. 18).

Р е ш е н и е. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \varphi$. Воспользуемся формулой площади параллелограмма $ABCD$

$$S = a \cdot b \cdot \sin \varphi.$$

Так как угол параллелограмма фиксирован, то наибольшая площадь у него будет, если наибольшим будет произведение $a \cdot b$. Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим,

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2},$$

которое выполняется для неотрицательных чисел $a$, $b$ и обращается в равенство только, если $a = b$.

Обозначим периметр параллелограмма $P$. Тогда $a + b = \frac{P}{2}$. Наибольшее значе-

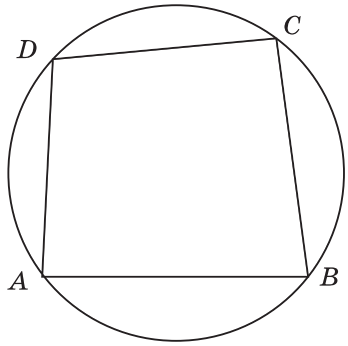



**Рис. 19**

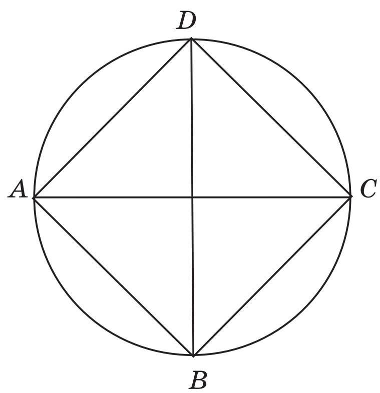



**Рис. 20**

ние $a \cdot b$ принимается, если $a = b = \frac{P}{4}$. Следовательно, искомым параллелограммом наибольшей площади является ромб.

**Задача 11.** Из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность радиусом $R$, найдите четырёхугольник наибольшей площади (рис. 19). Чему равна эта площадь?

Решение. Воспользуемся тем, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. Наибольшими диагоналями четырёхугольника, вписанного в окружность, являются диаметры этой окружности. Синус угла между диагоналями будет наибольшим, если эти диагонали перпендикулярны. Таким образом, наибольшую площадь будет иметь четырёхугольник, диагоналями которого являются перпендикулярные диаметры окружности. Этот четырёхугольник – квадрат (рис. 20). Его площадь равна $2R^2$.

**Задача 12.** Из всех прямоугольников, вписанных в данный полукруг (рис. 21), найдите прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если радиус соответствующего круга равен 1?

Решение 1. Пусть радиус круга равен $R$, $AB$ – диаметр, ограничивающий полукруг, $O$ – центр соответствующего круга. Рассмотрим прямоугольник $CDEF$, сторона $CD$ которого содержится в диаметре $AB$, а вершины $E$, $F$ принадлежат полуокружности (рис. 22).

Обозначим $CO = OD = x$, $DE = y$. Тогда $x^2 + y^2 = R^2$, а площадь $S$ прямоугольника $CDEF$ равна $2xy$. Квадрат этой площади равен $4x^2y^2$. Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим. Получим неравенство

$$4x^2y^2 \le \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 = R4.$$

Причём, равенство в этом неравенстве достигается в случае, если $x = y = \frac{\sqrt{2}R}{2}$. Таким образом, у искомого прямоугольника стороны равны $\sqrt{2}R$ и $\frac{\sqrt{2}R}{2}$. Его площадь равна $R^2$.

Решение 2. Воспользуемся тем, что из всех четырёхугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. В частности, из всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Следовательно, из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, наибольшую площадь будет иметь прямоугольник, являющийся половиной этого квадрата. Если радиус окружности равен $R$, то сторона квадрата равна $\sqrt{2}R$, а его площадь равна $2R^2$. Площадь искомого прямоугольника равна $R^2$.

**Изопериметрическая задача.** Среди всех простых (без точек самопересечения) замкнутых кривых данной длины найди-

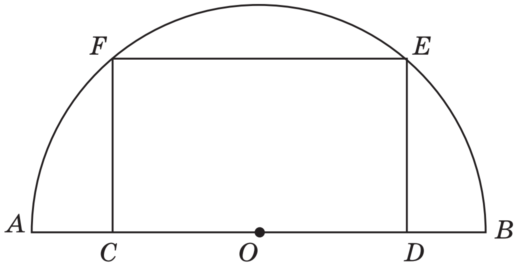



**Рис. 21**

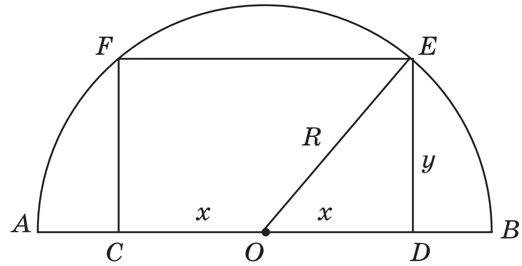



**Рис. 22**

те кривую, ограничивающую фигуру наибольшей площади.

Изопериметрической эта задача называется в связи с постоянством длины кривой, или, что то же самое, периметра искомой фигуры. С именем Дидоны она связывается по легенде, согласно которой финикийская царевна Дидона в IX веке до н. э., спасаясь от преследователей, заключила договор на покупку земли на побережье нынешнего Тунисского залива Средиземного моря с местным предводителем Ярбом. Она попросила совсем немного земли – столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Сделка состоялась, и тогда Дидона разрезала шкуру быка на тонкие тесёмки, связала из них верёвку, окружила ей довольно большую территорию и основала на ней крепость, в которой и спасалась от преследователей.

Вопрос состоял в том, какую форму должна иметь территория, ограниченная верёвкой, чтобы её площадь была наибольшей.

Заметим, что это не совсем тот вопрос, который мы сформулировали в изопериметрической задаче. Действительно, в задаче Дидоны верёвка не замкнута, её концы выходят на берег моря. Мы же рассматриваем замкнутые кривые.

При решении изопериметрической задачи мы будем предполагать существование искомой кривой. Доказательство этого выходит за рамки школьного курса математики.

Разобьём эту задачу на несколько подзадач. Для краткости, фигуру, ограниченную кривой данной длины, имеющую наибольшую площадь, будем называть максимальной.

**Задача 13.** Докажите, что невыпуклая фигура (рис. 23) не может быть максимальной, следовательно, максимальная фигура является выпуклой, то есть вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок.

Р е ш е н и е. Если фигура $\Phi$ невыпуклая, то существует отрезок $AB$, концы которого принадлежат кривой, а внутренние его точки расположены во внешней области (рис. 24).

Заменим дугу исходной кривой, соединяющую точки $A$, $B$, на симметричную ей дугу относительно прямой $AB$. Соответствующая ей фигура $\Phi'$ будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура немаксимальная.

**Задача 14.** Диаметром кривой будем называть хорду, делящую эту кривую на две части равной длины. Докажите, что диаметр кривой, ограничивающей максимальную фигуру, делит эту фигуру на две равновеликие части (рис. 25).

Р е ш е н и е. Пусть хорда $AB$ делит кривую на две части равной длины (рис. 26). Предположим, что площади образовавшихся частей $\Phi_1$, $\Phi_2$ фигуры $\Phi$ не равны, например, $S(\Phi_1) > S(\Phi_2)$. Построим фигуру

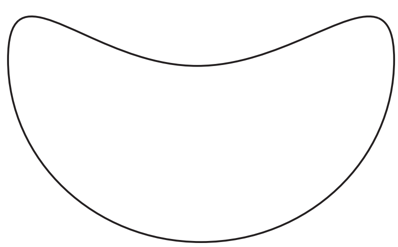


**Рис. 23**

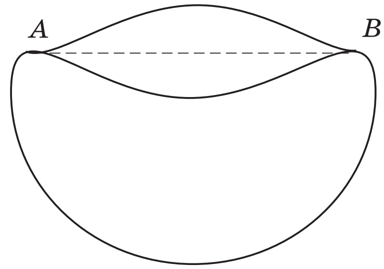



**Рис. 24**

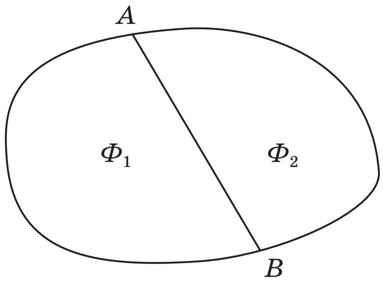



**Рис. 25**

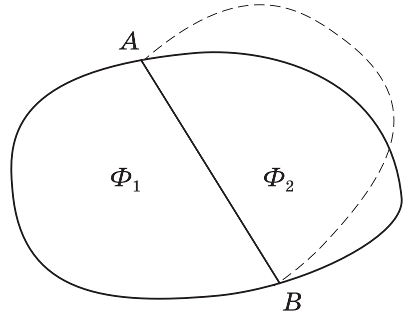



**Рис. 26**

$\Phi'$ того же самого периметра, но большей площади. Для этого в фигуре $\Phi$ заменим фигуру $\Phi_2$ на фигуру, симметричную $\Phi_1$ относительно прямой $AB$. Полученная фигура $\Phi'$ будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура немаксимальная.

**Задача 15.** Докажите, что если $AB$ – диаметр кривой, ограничивающей максимальную фигуру, то для любой точки $C$ этой кривой, отличной от точек $A$ и $B$, угол $ACB$ равен 90° (рис. 27). Таким образом, максимальная фигура должна быть ограничена окружностью.

Решение. Пусть хорда $AB$ делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру $\Phi$, на две части равной длины (рис. 28*а*).

Тогда она делит фигуру $\Phi$ на две части равной площади. Если кривая не окружность, то на ней найдётся точка $C$, для которой $\angle ACB \neq 90°$. Предположим, например, что точка $C$ принадлежит верхней части фигуры $\Phi$. Построим новую фигуру $\Phi'$. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник $A'B'C'$ с прямым углом $C'$, у которого $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ (рис. 28*б*). Площадь треугольника $A'B'C'$ больше площади треугольника $ABC$. Действительно, площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, а синус принимает наибольшее значение, равное единице, если угол равен 90°.

Присоединим к катетам треугольника $A'B'C'$ соответствующие части $\Phi_1'$ и $\Phi_2'$, равные соответственно частям $\Phi_1$ и $\Phi_2$ исходной фигуры. Полученную фигуру отразим симметрично относительно $A'B'$. Фигура $\Phi'$, состоящая из обеих этих частей, будет искомой. Ясно, что она огра-

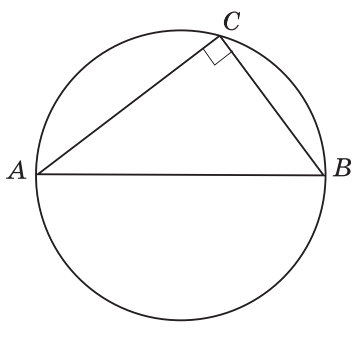



**Рис. 27**

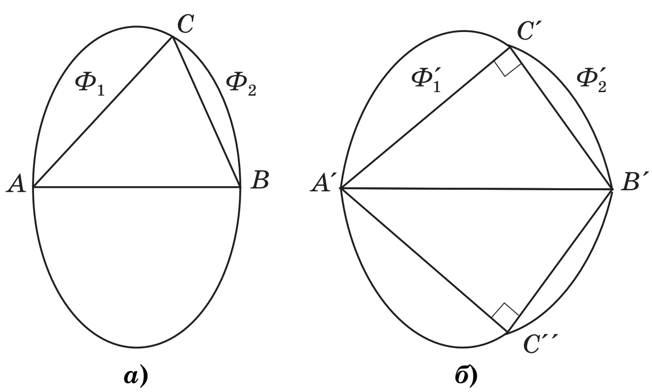



**Рис. 28**

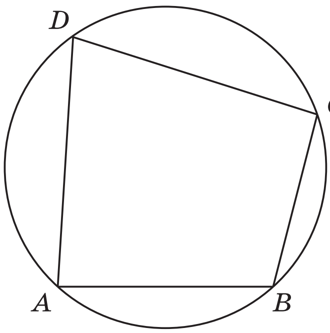
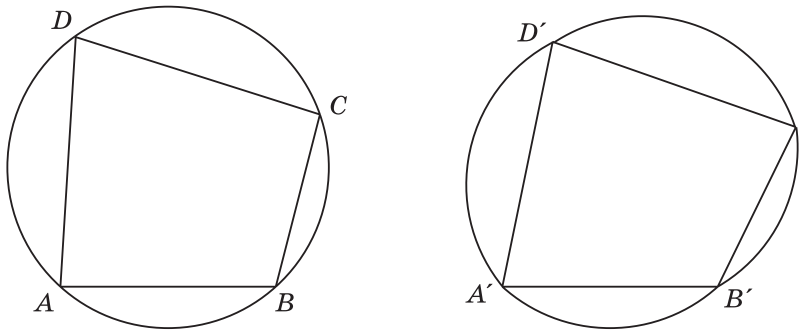



**Рис. 29**




*а*) б)

**Рис. 30**

ничена кривой той же длины. Однако, т.к. площадь треугольника $A'B'C'$ больше площади треугольника $ABC$, площадь верхней части фигуры $\Phi'$ будет больше площади верхней части фигуры $\Phi$. Аналогично, площадь нижней части фигуры $\Phi'$ будет больше площади нижней части фигуры $\Phi$. Таким образом, площадь всей фигуры $\Phi'$ будет больше площади исходной фигуры $\Phi$. Следовательно, исходная фигура немаксимальна. Что и завершает решение задачи Дидоны.

В качестве следствия из задачи Дидоны рассмотрим классическую задачу Крамера.

**Задача 16. (Задача Крамера.)** Докажите, что $n$-угольник, около которого можно описать окружность, имеет наибольшую площадь среди всех $n$-угольников с такими же сторонами. В качестве примера рассмотрите вписанный четырёхугольник (рис. 29).

Р е ш е н и е. Воспользуемся решением изопериметрической задачи. А именно, сравним первый многоугольник, вписанный в окружность (рис. 30*а*), с многоугольником с такими же сторонами, но не являющийся вписанным в окружность (рис. 30*б*). Дополним второй многоугольник сегментами, дополняющими первый многоугольник до круга. Так как этот многоугольник не является вписанным в окружность, то такое дополнение приведёт к фигуре, отличной от круга.

Поскольку периметр полученной фигуры равен периметру круга, то её площадь, в силу изопериметрической задачи, будет меньше площади круга. Значит, площадь второго многоугольника меньше площади первого многоугольника.

## Литература

1. *Возняк Г.М. Гусев В.А.* Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.

2. *Нагибин Ф.Ф.* Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.

3. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.

4. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Экстремальные задачи по геометрии. – М.: Чистые пруды, 2007.

5. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

6. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.