

ПОСТРОЕНИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Одной из важных целей обучения геометрии в школе является развитие конструктивных умений учащихся, включающих в себя умения изображать различные геометрические фигуры, проводить дополнительные построения.

Отсутствие задач на построение при обучении геометрии тормозит развитие геометрических представлений и, тем самым, существенно снижает качество обучения.

То, что геометрическим задачам на построение в школе уделяется недостаточно внимания, вызвано многими причинами, среди которых отметим следующие:

- для работы с циркулем и линейкой нужны специальные навыки;
- число задач на построение, которые учащиеся могут решить, весьма ограничено;
- само построение с помощью циркуля и линейки, как правило, является довольно громоздким и занимает много учебного времени;
- получаемый результат построения часто имеет большую погрешность;
- в связи с появлением компьютеров и графических редакторов снижается актуальность отработки навыков работы с циркулем и линейкой;
- геометрические задачи на построение отсутствуют в экзаменах по математике.

Из этого, конечно, не следует, что не нужно решать задачи на построение. Однако возможности таких задач для развития конструктивных умений учащихся явно ограничены.

Хорошим дополнением к задачам на построение с помощью циркуля и линейки могут служить задачи на изображение геометрических фигур на клетчатой бумаге. Предлагаемые задачи отличаются от традиционных задач на построение, которые проводятся с помощью циркуля и линейки. В каждой из них требуется построить геометрическую фигуру на клетчатой бумаге или найти геометрическое место точек с заданным свойством.

Для решения таких задач не требуется специальных инструментов, достаточно обычной тетради в клетку и карандаша или ручки. Все построения можно проводить «от руки» или с использованием линейки. При этом важным является не то, как аккуратно проведена та или иная линия, а то, как правильно указаны характерные точки (узлы клеток), через которые она проходит.

Здесь мы приведем примеры таких задач, относящихся к различным разделам геометрии. Более подробно они представлены в книге [1].

1. На рисунке 1 изобразите отрезок, длина которого равна $\sqrt{13}$ (стороны квадратных клеток равны 1).

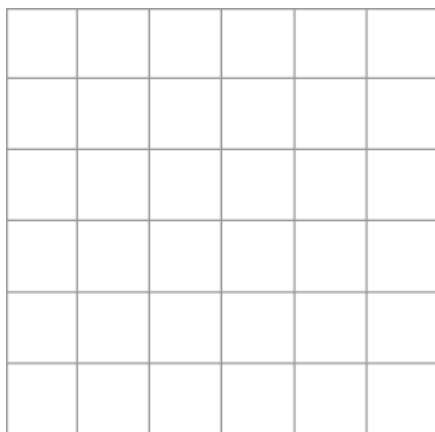


Рис. 1

Решение. Искомым отрезком является, например, отрезок AB , изображенный на рисунке 2. Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны соответственно 3 и 2, следовательно, гипотенуза AB равна $\sqrt{13}$.

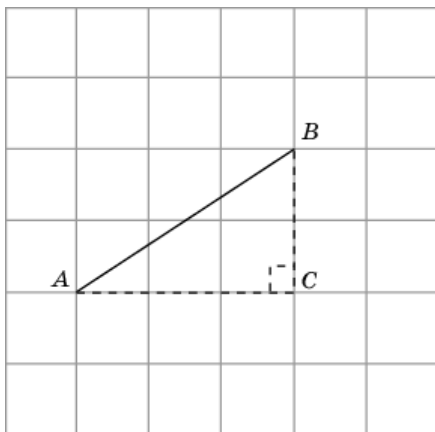


Рис. 2

2. На рисунке 3 через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB .

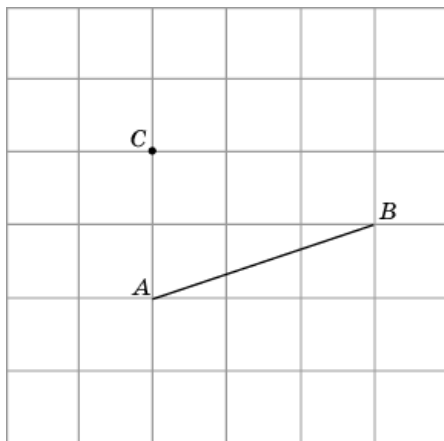


Рис. 3

Решение. Искомой прямой, проходящей через точку C и параллельной прямой AB , является прямая CD , изображенная на рисунке 4. Это следует из того, что в четырехугольнике $ABDC$ стороны AC и BD равны и параллельны. Следовательно, этот четырехугольник – параллелограмм, значит, прямая AB параллельна прямой CD .

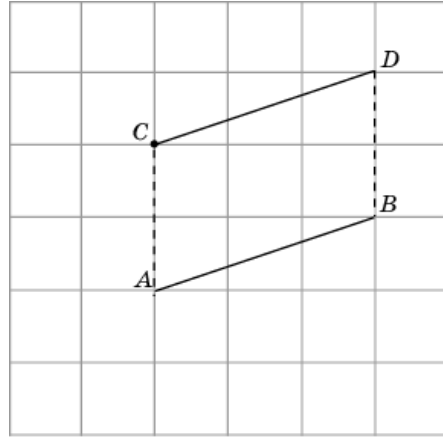


Рис. 4

3. На рисунке 5 от луча QP отложите угол PQR , равный углу AOB .

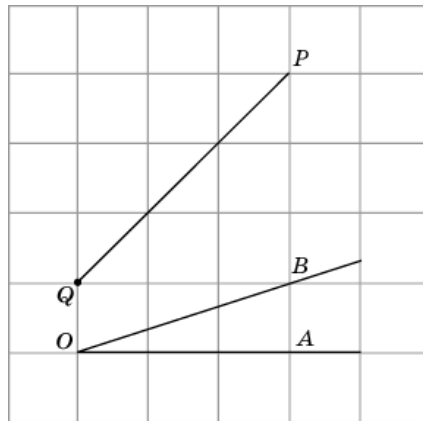


Рис. 5

Решение. Искомый угол PQR изображен на рисунке 6. Тангенсы углов AOB и PQR равны, следовательно, равны и сами углы AOB и PQR .

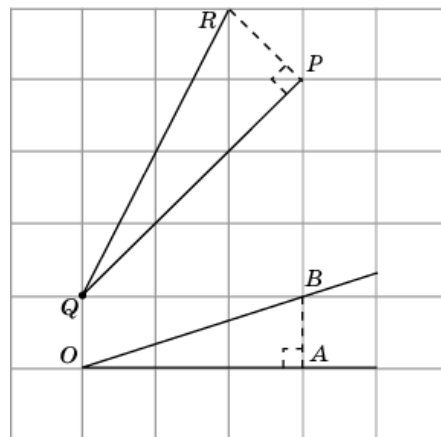


Рис. 6

4. На рисунке 7 через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой AB .

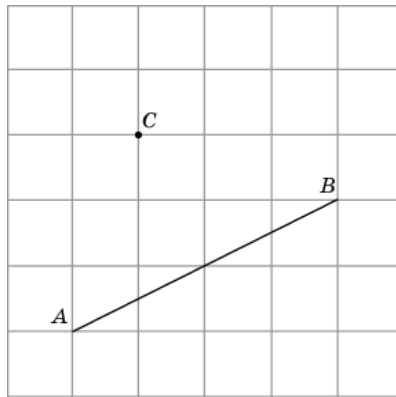


Рис. 7

Решение. Искомой прямой является прямая CD (рис. 8). Действительно, прямоугольные треугольники ADE и CDF равны по двум катетам, значит, угол ADE равен углу CDF . Следовательно, угол ADC равен углу EDF , т. е. равен 90° . Таким образом, прямые AB и CD перпендикулярны.

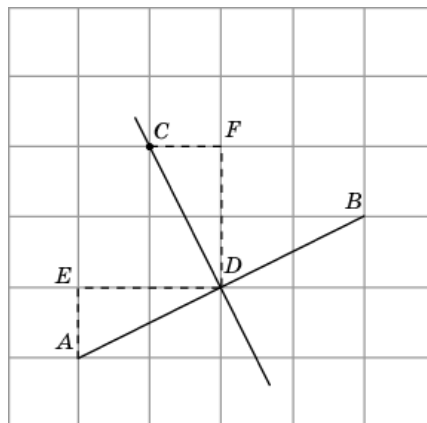


Рис. 8

4. На прямой c (рис. 9) отметьте точку C , равноудаленную от заданных точек A и B .

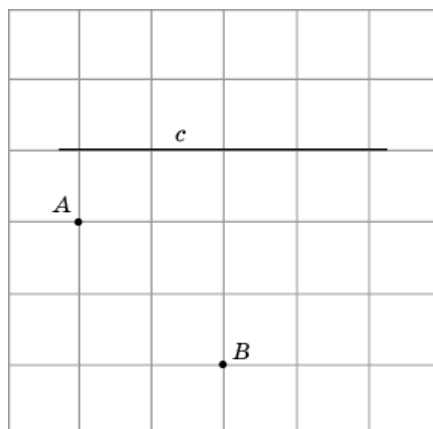


Рис. 9

Решение. Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A и B , является серединный перпендикуляр к отрезку AB . Искомой точкой C является точка пересечения этого перпендикуляра с прямой c (рис. 10).

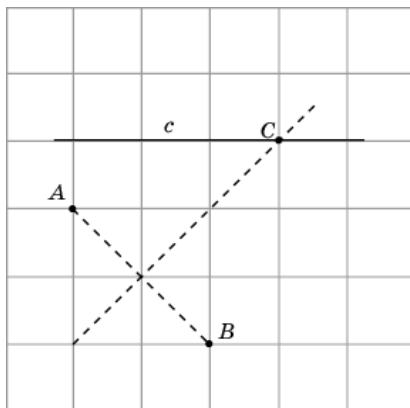


Рис. 10

5. На прямой c (рис. 11) отметьте точку C , равноудаленную от сторон угла AOB .

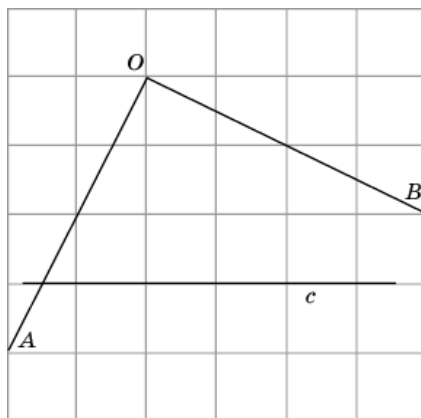


Рис. 11

Решение. Геометрическим местом внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла (рис. 12). Треугольник AOB – равнобедренный ($OA = OB$). Следовательно, биссектриса угла AOB проходит через середину отрезка AB . Искомой точкой C будет точка пересечения этой биссектрисы с прямой c .

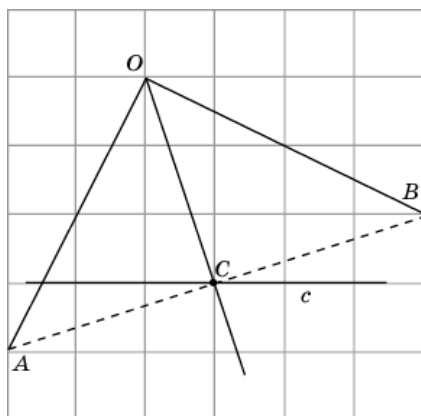


Рис. 12

7. Изобразите параллелограмм, тремя вершинами которого являются указанные на рисунке 13 точки. Сколько решений имеет задача?

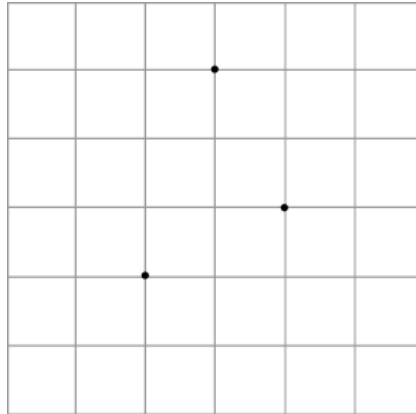


Рис. 13

Решение. Искомыми параллелограммами являются $ABCD_1$, ABD_2C , $ACBD_3$ (рис. 14). Задача имеет три решения.

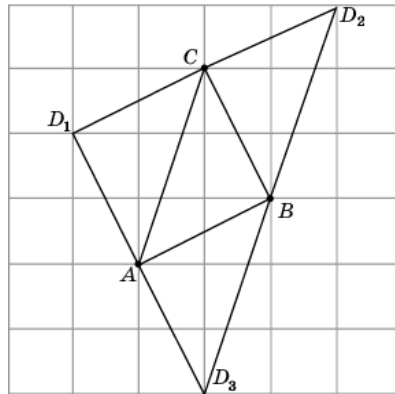


Рис. 14

8. Отметьте центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 15).

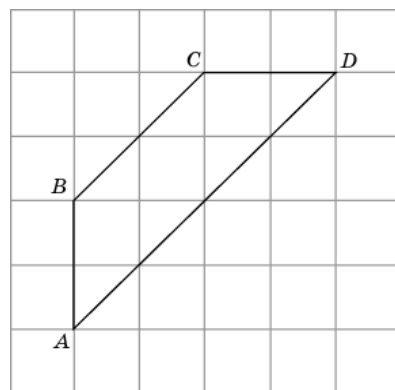


Рис. 15

Решение. Центром окружности, описанной около равнобедренной трапеции $ABCD$, служит точка O , равноудаленная от ее вершин (рис. 16). Она является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и CD трапеции.

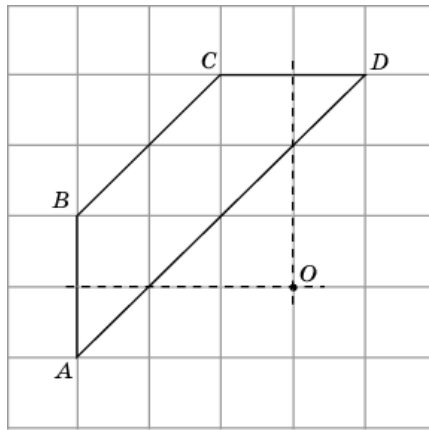


Рис. 16

9. Отметьте центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 17).

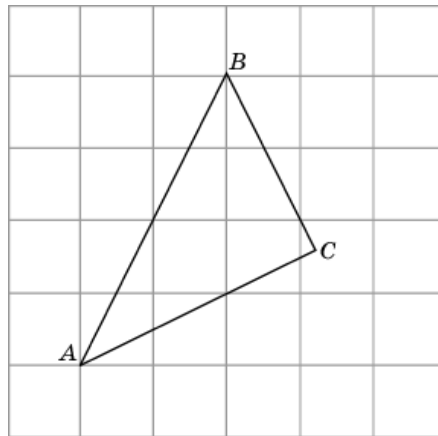


Рис. 17

Решение. Центром окружности, вписанной в треугольник ABC , является точка O пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 этого треугольника (рис. 18).

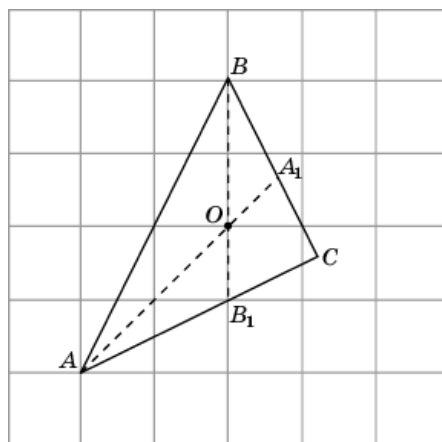


Рис. 18

10. Отметьте центр окружности, вписанной в квадрат $ABCD$ (рис. 19).

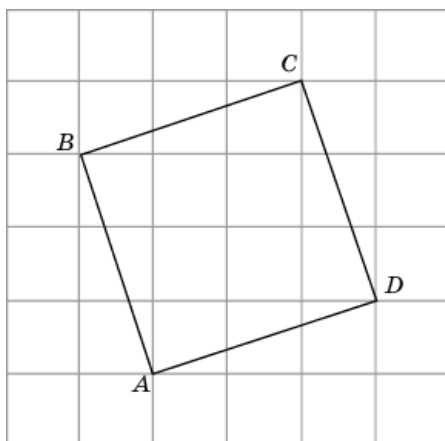


Рис. 19

Решение. Центром окружности, вписанной в квадрат, является точка O пересечения диагоналей этого квадрата (рис. 20).

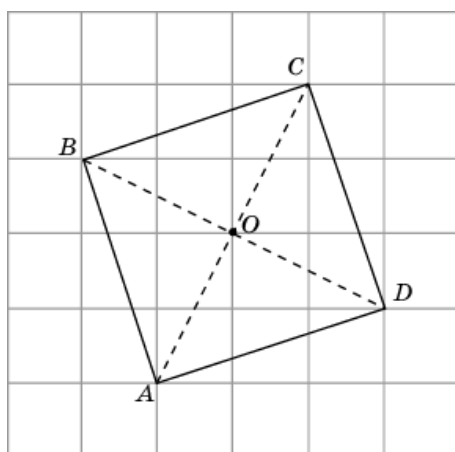


Рис. 20

11. Изобразите отрезок $A'B'$, симметричный отрезку AB относительно прямой c (рис. 21).

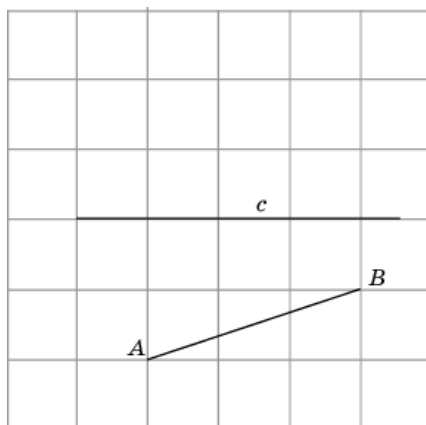


Рис. 21

Решение. Искомый отрезок $A'B'$ изображен на рисунке 22.

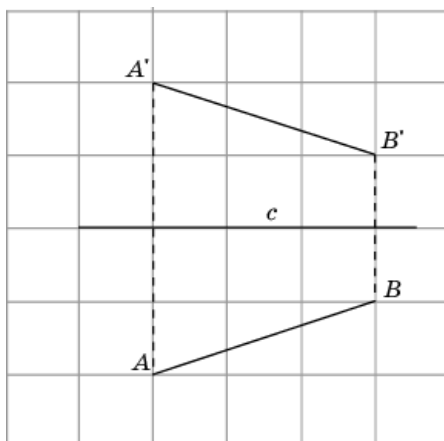


Рис. 22

12. Изобразите треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC относительно точки O (рис. 23).

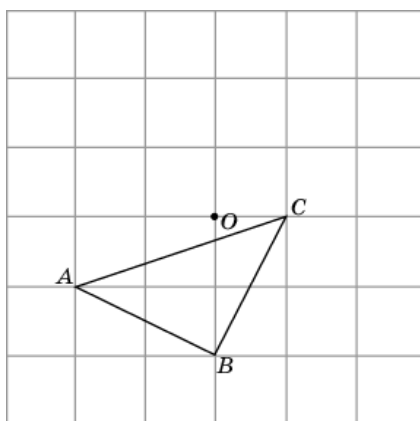


Рис. 23

Решение. Искомый треугольник $A'B'C'$ изображен на рисунке 24.

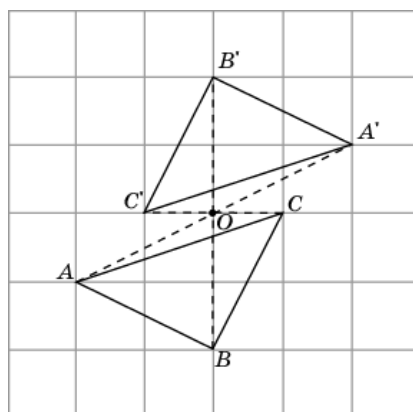


Рис. 24

Для самостоятельной работы предлагаем следующие задачи.

1. Изобразите угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (рис. 25).

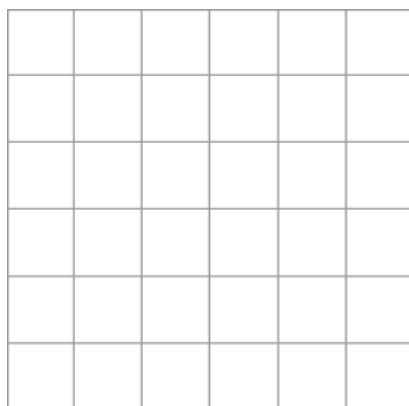


Рис. 25

2. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB (рис. 26).

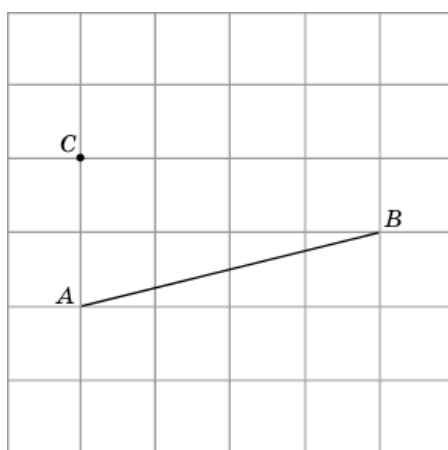


Рис. 26

3. От луча QP отложите угол PQR , равный углу AOB (рис. 27).

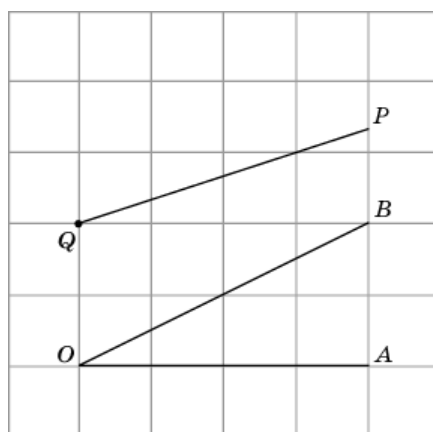


Рис. 27

4. Через точку C проведите прямую, перпендикулярную прямой AB (рис. 28).

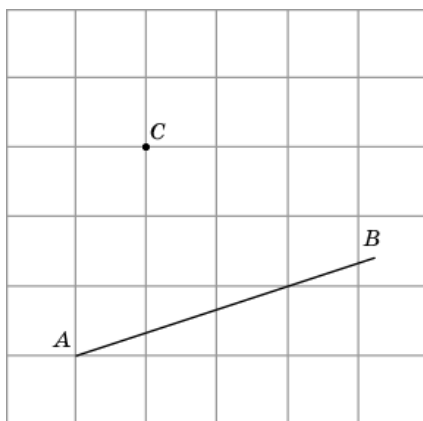


Рис. 28

5. На прямой c отметьте точку C , равноудаленную от заданных точек A и B (рис. 29).

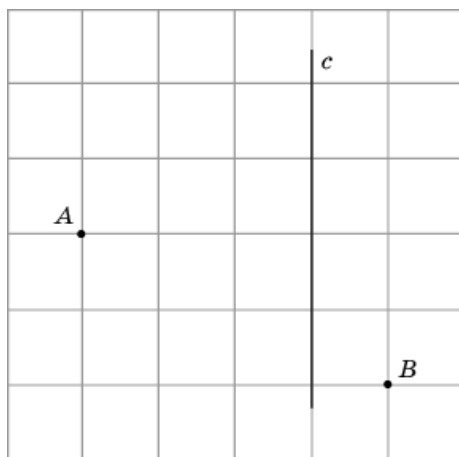


Рис. 29

6. На прямой c отметьте точку C , равноудаленную от сторон угла AOB (рис. 30).

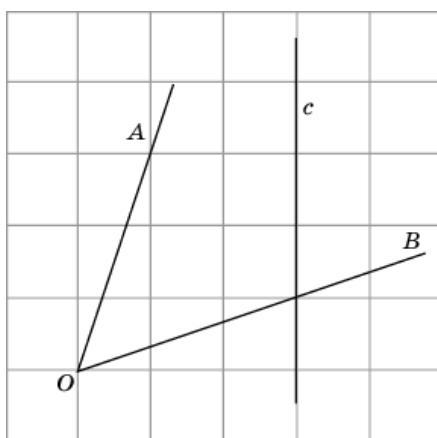


Рис. 30

7. Изобразите прямоугольник, двумя противоположными вершинами которого являются указанные на рисунке 31 точки, а две оставшиеся вершины расположены в узлах сетки. Сколько решений имеет задача?

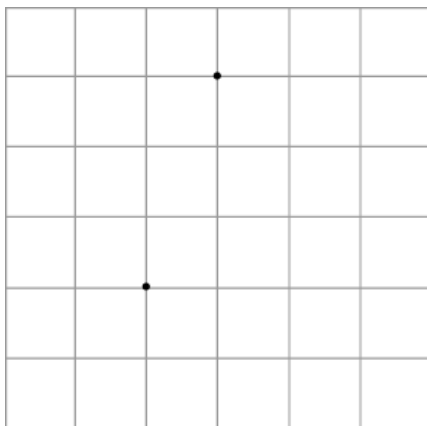


Рис. 31

8. Отметьте центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 32).

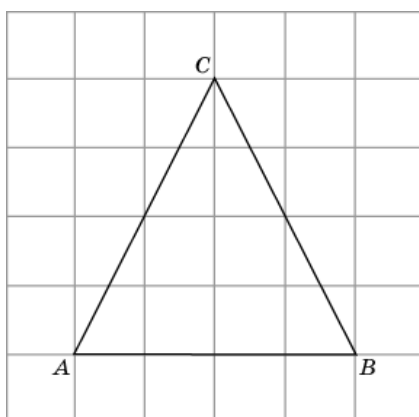


Рис. 32

9. Изобразите треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC относительно прямой c (рис. 33).

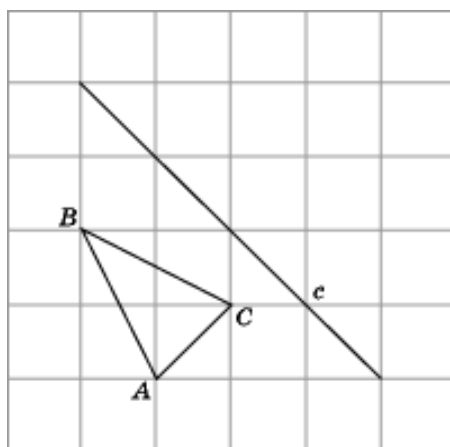


Рис. 33

10. Изобразите четырехугольник $A'B'C'D'$, симметричный четырехугольнику $ABCD$ относительно точки O (рис. 34).

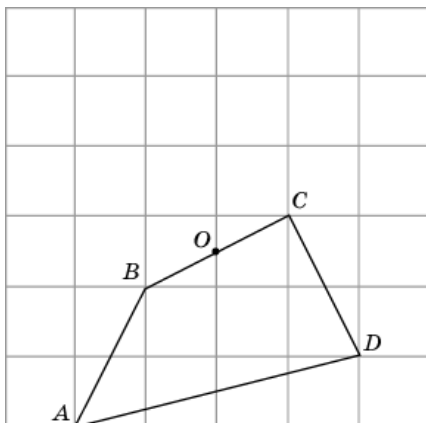


Рис. 34

Литература

1. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия на клетчатой бумаге. – М.: МЦНМО, 2009.