И.М.Смирнова, В.А.Смирнов

КАСКАДЫ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Квант 2015 № 3

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагор и его ученики считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира, придавая форму правильных многогранников элементам первооснов бытия, а именно: огонь – тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника, рис. 1,а); земля - гексаэдр (куб – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. 1,б); воздух – октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. 1,в); вода – икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. 1,г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. 1,д).

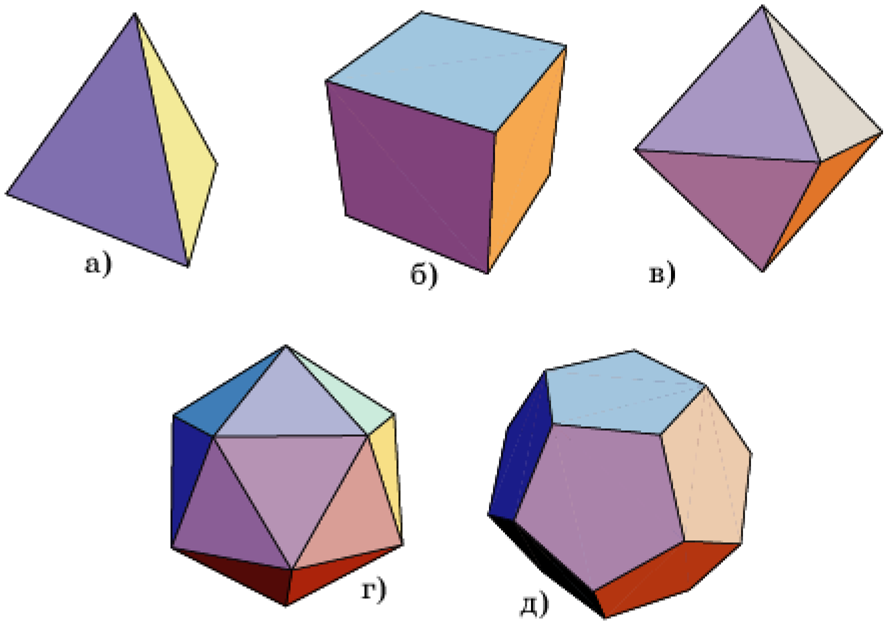

Рис. 1

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окто" - восемь; "Икоси" - двадцать, "Додека" - двенадцать. "Эдра" - грань. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон (429 – 348 до н.э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также телами Платона.

Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых "Начал" Евклида.

Иоганн Кеплер (1571-1630) в своей работе "Тайна мироздания" в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы.

Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера (рис. 2).

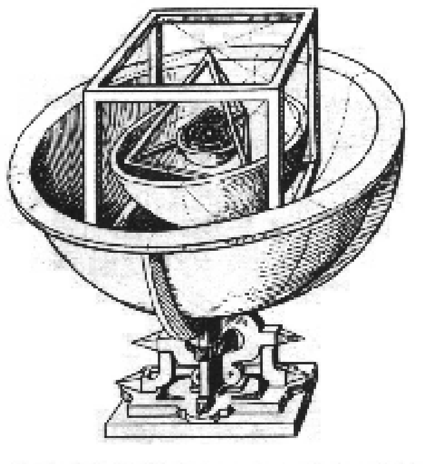

Рис. 2

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, как правильные многогранники можно вписывать друг в друга. Покажем, что каждый правильный многогранник можно вписать в любой другой правильный многогранник. Последовательное вписывание друг в друга всех правильных многогранников будем называть каскадом. Таким образом, всего имеется 5! = 120 различных каскадов.

При вписывании друг в друга правильных многогранников возможны следующие случаи:

1. Вершинами вписанного многогранника являются некоторые вершины описанного многогранника.

2. Вершинами вписанного многогранника являются середины ребер описанного многогранника.

3. Вершинами вписанного многогранника являются центры граней описанного многогранника.

4. Серединами ребер вписанного многогранника являются центры граней описанного многогранника.

5. Центрами граней вписанного многогранника являются некоторые центры граней описанного многогранника.

Так, например, в куб можно вписать октаэдр (рис. 3). Центры граней куба образуют вершины вписанного в него октаэдра.

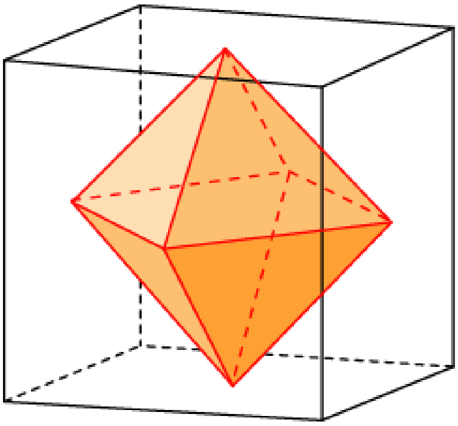

Рис. 3

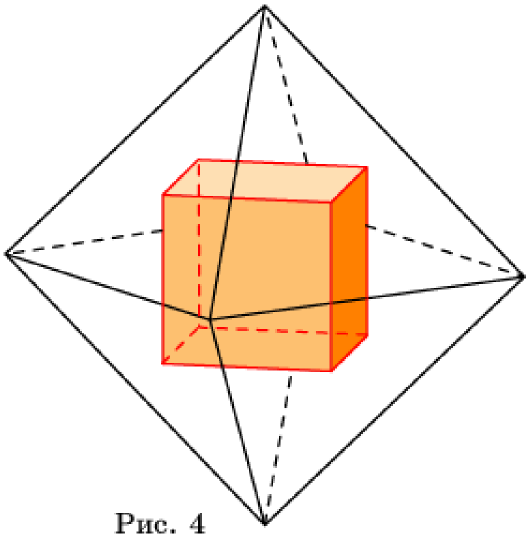

Рис. 4

В свою очередь, центры граней октаэдра образуют вершины вписанного в него куба (рис. 4). Многогранники, обладающие таким свойством, называются взаимно двойственными. Таким образом, октаэдр и куб - взаимно двойственные многогранники.

Другим примером взаимно двойственных правильных многогранников являются додекаэдр и икосаэдр. Центры граней додекаэдра находятся в вершинах вписанного в него икосаэдра (рис. 5). И наоборот, центры граней икосаэдра служат вершинами вписанного в него додекаэдра (рис. 6).

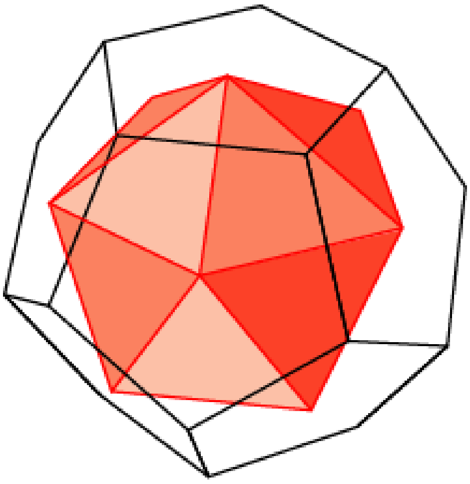

Рис. 5

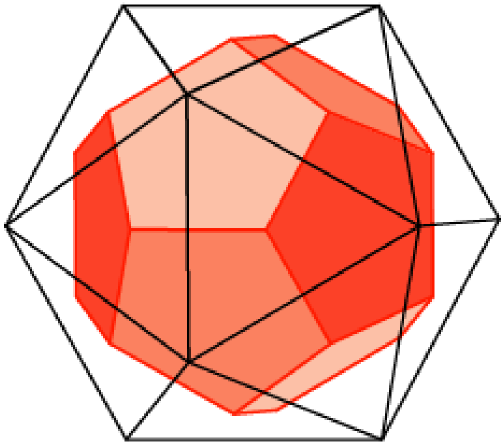

Рис. 6

Правильные многогранники можно вписывать друг в друга не только таким способом, о котором сказано выше. Например, в куб можно вписать тетраэдр. При этом вершины тетраэдра будут лежать в вершинах куба (рис. 7). В свою очередь, куб можно вписать в додекаэдр так, чтобы вершины куба лежали в вершинах додекаэдра (рис. 8).

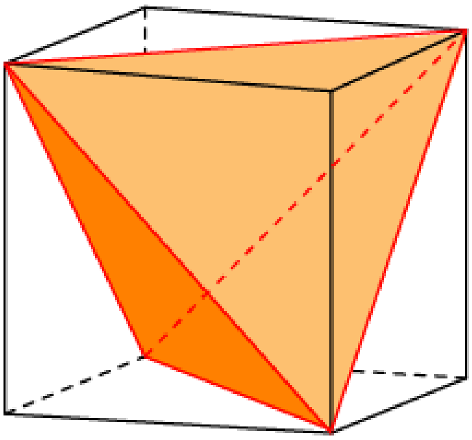

Рис. 7

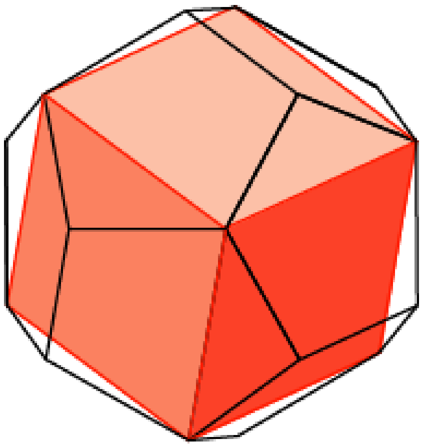

Рис. 8

При вписывании одного правильного многогранника в другой, вершины первого могут лежать на серединах ребер второго. Такими многогранниками являются тетраэдр и вписанный в него октаэдр (рис. 9).

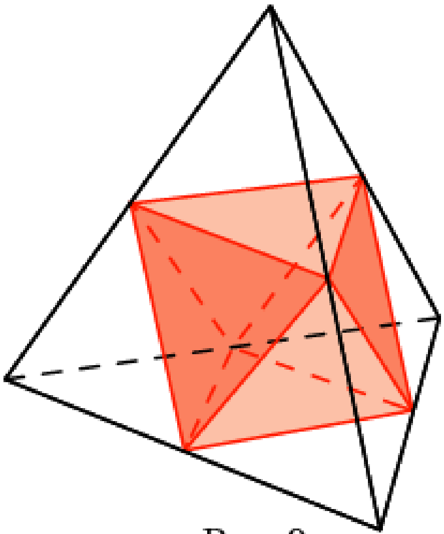

Рис. 9

Есть и еще один способ: середины ребер вписываемого многогранника лежат в центрах граней описываемого. А именно, построим на гранях куба отрезки, параллельные ребрам и середины которых лежат в центрах граней. Одним из таких отрезков является отрезок AB (рис. 10). Соединим концы этих отрезков, как показано на рисунке 10. В результате получим многогранник, гранями которого являются двадцать треугольников и в каждой вершине сходится пять ребер (рис. 11). Для того чтобы этот многогранник был икосаэдром, нужно подобрать такую длину отрезка AB, чтобы все его ребра были равны.

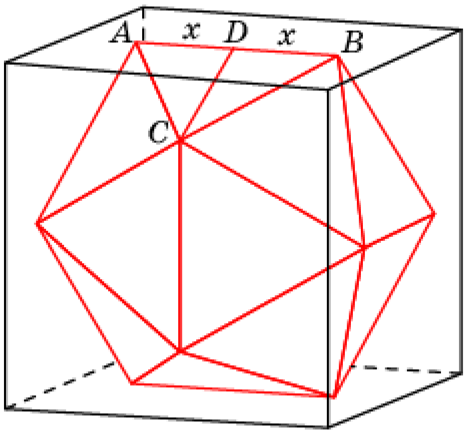

Рис. 10

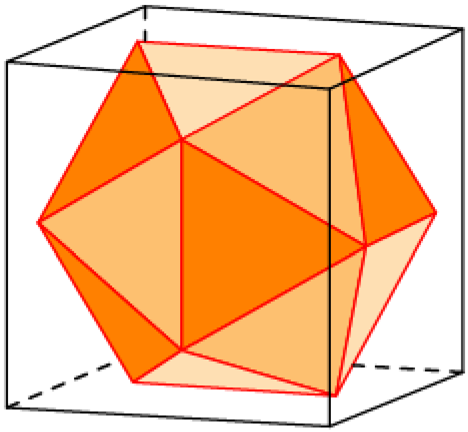

Рис. 11

Пусть ребро куба равно 2. Обозначим длину половины отрезка AB через x. Вычислим длину отрезка BC. На рисунке 12 изображено сечение куба, перпендикулярное AB и проходящее через его середину D. Имеем $CD^2 = 1 + (1 - x)^2 = x^2 - 2x + 2$. $BC^2 = BD^2 + CD^2 = 2x^2 - 2x + 2$. Из условия $AB = BC$ получаем уравнение $4x^2 = 2x^2 - 2x + 2$. Откуда находим $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. x равно золотому отношению.

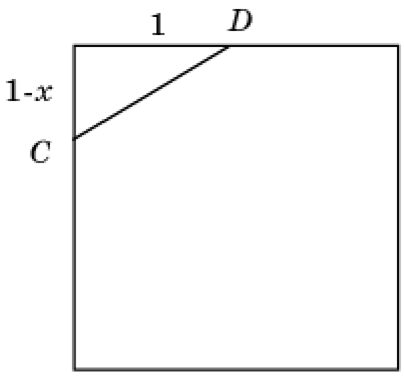

Рис. 12

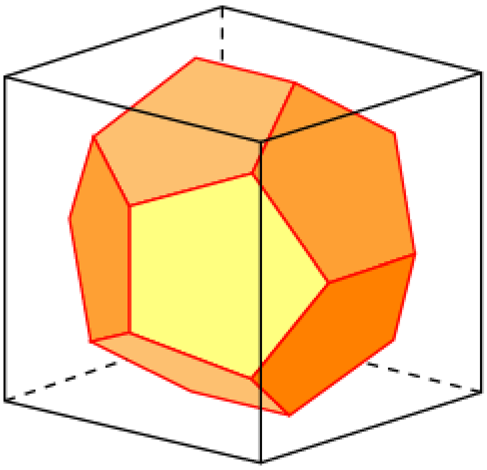

Рис. 13

Аналогичным образом в куб можно вписать додекаэдр (рис. 13). Самостоятельно посчитайте, каким будет ребро додекаэдра, вписанного в куб с ребром 2.

Покажем, что, комбинируя рассмотренные случаи, в любой правильный многогранник можно вписать все остальные правильные многогранники.

Действительно, как мы говорили, в куб можно вписать октаэдр, тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр, т.е. все остальные правильные многогранники.

В додекаэдр можно вписать икосаэдр (рис. 5) и куб (рис. 8). Вписывая в куб тетраэдр, получим тетраэдр, вписанный в додекаэдр (рис. 14).

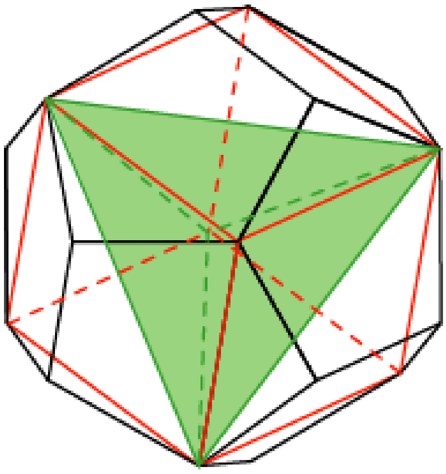

Рис. 14

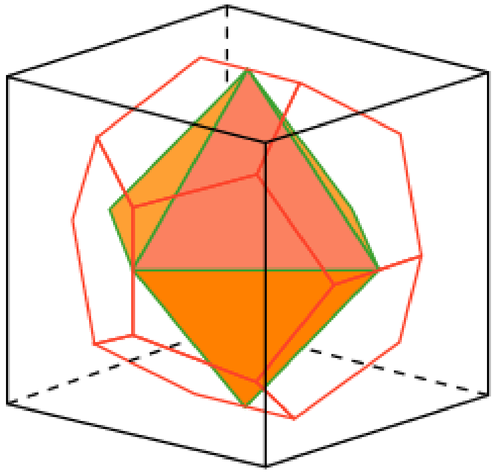

Рис. 15

Вписывая в куб додекаэдр и октаэдр, получим октаэдр, вписанный в додекаэдр (рис. 15), и, следовательно, в додекаэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

В икосаэдр можно вписать додекаэдр (рис. 6) и, следовательно, куб и тетраэдр (рис. 14).

Вписывая в куб икосаэдр и октаэдр, получим октаэдр, вписанный в икосаэдр (рис. 16). Таким образом, в икосаэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

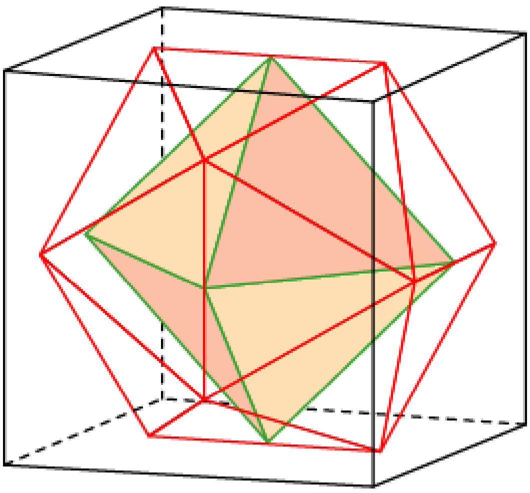

Рис. 16

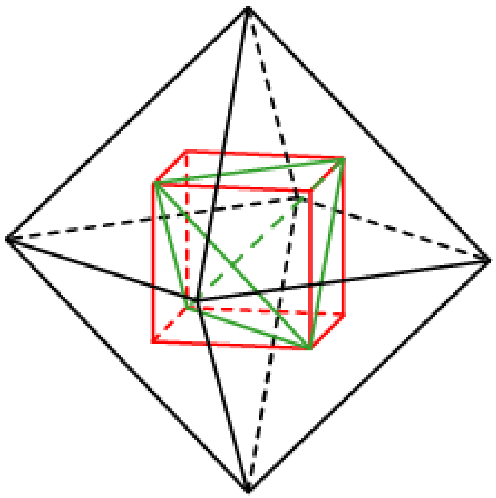

Рис. 17

Рассмотрим октаэдр. В него можно вписать куб (рис. 4) и, следовательно, тетраэдр (рис. 17).

Описывая около куба, вписанного в октаэдр, додекаэдр, получим додекаэдр, вписанный в октаэдр (рис. 18).

Аналогично, описывая около куба икосаэдр, получим икосаэдр, вписанный в октаэдр (рис. 19).

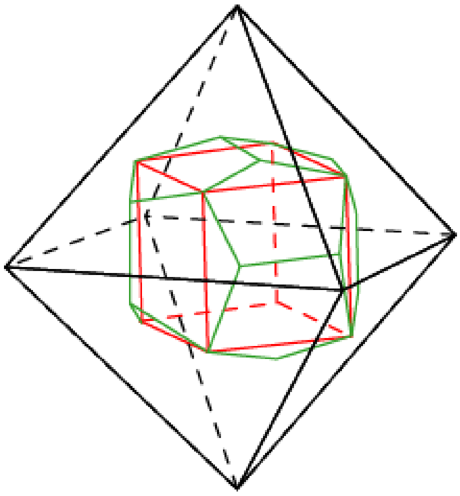

Рис. 18

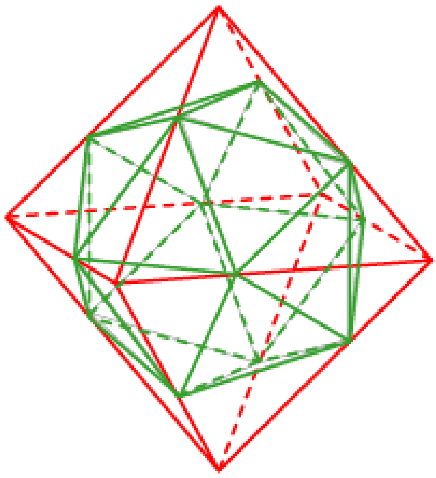

Рис. 19

Таким образом, в октаэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

Рассмотрим оставшийся правильный многогранник- тетраэдр. В него можно вписать октаэдр (рис. 9). Вписывая в октаэдр куб (рис. 20), икосаэдр (рис. 21) и додекаэдр (рис. 22), получим, что в тетраэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

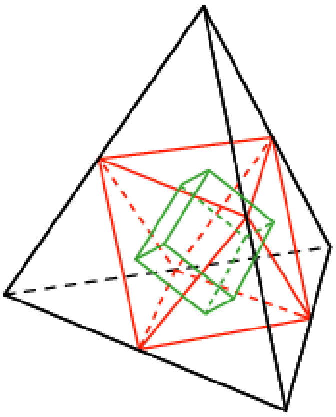

Рис. 20

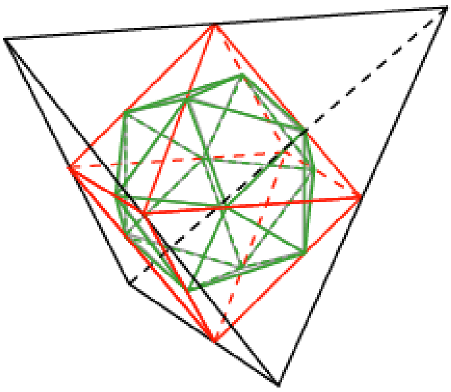

Рис. 21

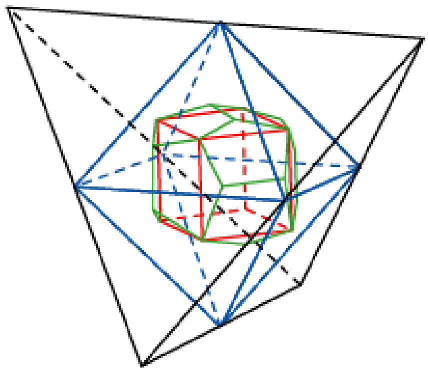

Рис. 22

Таким образом, мы показали, что любой правильный многогранник можно вписать в любой другой правильный многогранник. Значит, число всевозможных каскадов из различных правильных многогранников равно 5!=120.

Сделаем еще одно замечание, необходимое для изготовления модели каскадного вписывания правильных многогранников. Во-первых, центры последовательно вписанных друг в друга правильных многогранников совпадают; во-вторых, если вершины вписанного многогранника лежат в центрах граней описанного многогранника, то радиус сферы, описанной около вписанного многогранника, будет равен радиусу сферы, вписанной в описанный многогранник. Если вершины вписанного многогранника лежат на серединах ребер описанного многогранника, то радиус сферы, описанной около вписанного многогранника, равен радиусу сферы, касающейся середин ребер вписанного многогранника.

Поясним сказанное на примере. Пусть куб вписан в октаэдр. Вершины куба находятся в центрах граней октаэдра. Обозначим через a_6 длину ребра куба, тогда $R_6 = a_6\frac{\sqrt{3}}{2}$, где R_6 - радиус сферы, описанной около куба. Пусть теперь R_8 - радиус сферы, вписанной в октаэдр, $R_8 = a_8\frac{\sqrt{6}}{6}$, где a_8 - длина ребра октаэдра. В нашем случае R_6=R_8, т.е. $a_6\frac{\sqrt{3}}{2} = a_8\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Следовательно, $a_8 = \frac{3\sqrt{2}}{2}a_6$, что позволяет найти ребро октаэдра a_8, описанного около куба с ребром a_6.

В качестве примера приведем вычисления ребер следующих каскадно вписанных друг в друга правильных многогранников:

тетраэдр $\rightarrow$ икосаэдр $\rightarrow$ додекаэдр $\rightarrow$ октаэдр $\rightarrow$ куб

(a_4, r_4, R_4) (a_{20}, r_{20}, R_{20}) (a_{12}, r_{12}, R_{12}) (a_8, r_8, R_8) (a_6, r_6, R_6)

Здесь через a_i обозначена длина ребра соответствующего многогранника, через r_i - радиус вписанной сферы, через R_i - радиус описанной сферы (i=4, 6, 8, 12, 20).

В данном случае самым внутренним многогранником является куб, а самым внешним - тетраэдр. Поэтому сначала рассмотрим первый этап: октаэдр $\rightarrow$ куб, т.е. описывание октаэдра около куба.

Как было показано выше, длина ребра описанного октаэдра a_8 связана с длиной ребра вписанного куба a_6 следующим соотношением: $\frac{3\sqrt{2}}{2}a_6$=a_8.

Второй этап: додекаэдр $\rightarrow$ октаэдр.

Вычислим длину ребра додекаэдра a_{12}, описанного около октаэдра. Вершины октаэдра лежат в серединах противоположных ребер додекаэдра. Следовательно, радиус сферы, описанной около октаэдра, равен радиусу сферы, касающейся середин ребер додекаэдра. Радиус этой второй сферы легко найти, рассмотрев треугольник AOB, AB - ребро додекаэдра, точка O - центр октаэдра и додекаэдра, OH, радиус искомой сферы, равен высоте равнобедренного треугольника, опущенной из вершины O. Так как $|AO|$=$|BO|$=R_{12}, то $|OH|$=$\sqrt{R_{12}{}^2 - \frac{a_{12}^4}{4}}$. Замечая, что R_{12}=$a_{12}\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$, имеем $|OH|$= $\frac{a_{12}\sqrt{2}(\sqrt{7}+3\sqrt{5})}{4}$.

Далее $|OH|=R_8$, отсюда $\dfrac{a_{12}\sqrt{2}(\sqrt{7}+3\sqrt{5})}{4}= a_8\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, $a_{12}=\dfrac{2a_8}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}$.

Третий этап: икосаэдр → додекаэдр.

Эти многогранники двойственны, поэтому $r_{20}=R_{12}$, т.е. $a_{20}\dfrac{\sqrt{3}}{12(3+\sqrt{5})}$ = $a_{12}\dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$ и, следовательно, $a_{20}=\dfrac{3}{2}a_{12}(\sqrt{5}-1)$.

Четвертый этап: тетраэдр → икосаэдр.

Грани икосаэдра лежат на гранях тетраэдра, причем центры соответствующих граней совпадают, т.е. равны радиусы вписанных сфер: $r_4=r_{20}$, тогда $a_4\dfrac{\sqrt{6}}{12}=a_{20}\dfrac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$ и, следовательно,

$$a_4=\frac{1}{2}a_{20}\sqrt{2}(3+\sqrt{5}).$$

После того как вычислены ребра всех правильных многогранников, участвующий в данном каскадном вписывании, можно приступать к изготовлению модели. При этом следует начинать с самого внутреннего многогранника - куба, - и заканчивать внешним - тетраэдром.

Попробуйте самостоятельно вычислить размеры и изготовить модель какого-нибудь каскада из правильных многогранников.

В заключение приведем несколько задач для самостоятельного решения на вложение одного правильного многогранника в другой.

1. Можно ли тетраэдр с ребром 4 поместить в куб с ребром 3? Какое наибольшее ребро может быть у правильного тетраэдра, помещающегося в единичном кубе?

2. Можно ли куб с ребром 3 поместить в додекаэдр с ребром 2? Какое наибольшее ребро может быть у куба, помещающегося в единичном додекаэдре?

3. Можно ли тетраэдр с ребром 2 поместить в единичный додекаэдр? Какое наибольшее ребро может быть у тетраэдра, помещающегося в единичном додекаэдре?

4. Через каждое ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру этого тетраэдра. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

5. Правильный тетраэдр повернут вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, на угол, равный 90°. Какой многогранник является общей частью исходного тетраэдра и повернутого?

6. Через каждую вершину куба проведена плоскость, перпендикулярная диагонали этого куба, проходящую через данную вершину. Какой многогранник ограничен этими плоскостями.