В.А. Смирнов
Московский педагогический государственный университет
v-a-smirnov@mail.ru
И.М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет
i-m-smirnova@yandex.ru

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ (10–11 КЛАССЫ)

В статье предлагаются комбинаторные задачи по геометрии, решение которых развивает комбинаторные представления и мышление учащихся 10-11 классов.

Данная статья является продолжением статьи о комбинаторных задачах по геометрии для учащихся 7–9 классов [1]. В ней мы рассмотрим комбинаторные задачи по геометрии для учащихся 10–11 классов, направленные на формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления учащихся. Часть из них имеется в учебнике геометрии [2]. Рекомендуем также книгу [3], в которой имеются комбинаторные задачи по геометрии повышенного уровня трудности.

1. Прямые и плоскости в пространстве.

1.1. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из: а) четырёх; б) пяти; в)* n точек в пространстве, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

Р е ш е н и е. Поскольку плоскость однозначно задается тремя точками, не принадлежащими одной прямой, то число плоскостей равно числу сочетаний из n по три, то есть равно $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

1.2. Сколько плоскостей проходит через различные пары из: а) трёх; б) четырёх; в)* n параллельных прямых в пространстве, никакие три из которых не лежат в одной плоскости?

Р е ш е н и е. Поскольку плоскость однозначно задаётся двумя параллельными прямыми, то число плоскостей равно числу сочетаний из n по два, то есть равно

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

1.3. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях: а) трёх; б) четырёх; в)* n плоскостей?

Р е ш е н и е. Наибольшее число прямых получается, если каждая плоскость пересекается с каждой и никакие три плоскости не пересекаются по одной прямой. В этом случае каждая прямая однозначно определяется парой плоскостей. Следовательно, наибольшее число прямых равно числу сочетаний из n по два, то есть равно $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.4. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство: а) две; б) три; в) четыре; г)* n плоскостей?

Решение. Выясним, на сколько может увеличиваться число частей пространства при добавлении новой n-й плоскости к уже имеющимся (n – 1)-й плоскости. Количество частей пространства, которые разбиваются на две части n-й плоскостью, равно количеству частей n-й плоскости, на которые она разбивается линиями пересечения с имеющимися (n – 1)-й плоскостями. Так как число таких линий равно n – 1, то наибольшее число частей n-й плоскости равно $\dfrac{n(n-1)}{2}+1.$

Следовательно, наибольшее число частей пространства равно сумме

$$1+1+2+4+7+\ldots+\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right).$$

Для нахождения формулы для этой суммы представим её в виде

$$1+n+\left(1+3+6+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}-\frac{(n-1)n(n+2)}{6}.$$

Тогда

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n-1)}{2} = 1+ (4-1) + (10-4) + \ldots + \left(\frac{(n-1)n(n+1)}{6}-\frac{(n-1)n(n+2)}{6}\right)=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Следовательно,

$$1+1+2+4+7+\ldots+\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) = 1+n+\frac{(n-1)(n+1)}{6}.$$

2. Многогранники. Приведём несколько примеров комбинаторных задач на многогранники.

2.1. Сколько диагоналей в: а) треугольной; б) четырёхугольной; в) пятиугольной; г) шестиугольной; д)* n-угольной призме (рис. 1)?

Решение. В n-угольной призме диагоналями являются отрезки, соединяющие вершины оснований и не лежащие в боковых гранях призмы. Число таких отрезков равно удвоенному числу диагоналей n-угольника. Как было показано в статье [1], число диагоналей n-угольника равно $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Следовательно, число диагоналей n-угольной призмы равно $n(n-3)$.

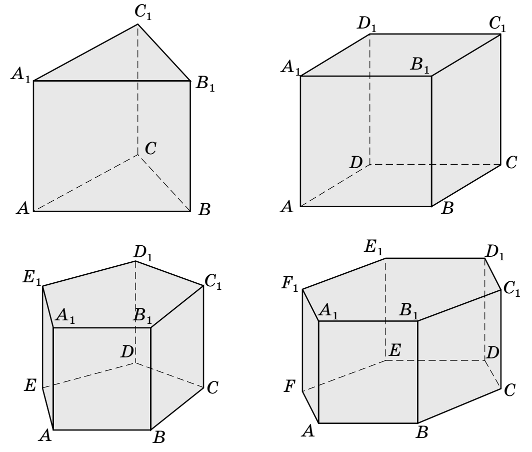

Рис. 1

2.2. Сколько осей симметрии имеет правильная: а) треугольная; б) четырёхугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д)* n-угольная призма (рис. 1)?

Р е ш е н и е. Если n нечётно, то осями симметрии являются прямые, проходящие через середины боковых рёбер и центры противолежащих боковых граней. Число таких прямых равно n. Если n чётно, то осями симметрии являются прямые, проходящие через: середины противолежащих боковых рёбер; центры противолежащих боковых граней; центры оснований призмы. Общее число осей симметрии равно $n + 1$. Если правильная четырёхугольная призма является кубом, то имеются дополнительные оси симметрии, проходящие через середины противолежащих сторон её оснований. Число этих осей симметрии равно 4. Общее число осей симметрии в кубе равно 9.

2.3. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная: а) треугольная; б) четырёхугольная; в) пятиугольная; г) шестиугольная; д)* n-угольная призма (рис. 1)?

Р е ш е н и е. Если n нечётно, то плоскостями симметрии являются плоскости, проходящие через боковые рёбра и центры противолежащих боковых граней, а также плоскость, проходящая через середины боковых рёбер призмы. Общее число таких плоскостей симметрии равно $n + 1$. Если n чётно, то плоскостями симметрии являются: плоскости, проходящие через боковые рёбра и центры противолежащих боковых граней; плоскости, проходящие через центры боковых граней и перпендикулярные плоскостям оснований; плоскость, проходящая через середины боковых рёбер призмы. Общее число таких плоскостей симметрии равно $n + 1$. Если правильная четырёхугольная призма является кубом, то имеются дополнительные плоскости симметрии, проходящие через противолежащие стороны её оснований. Число этих плоскостей симметрии равно 4. Общее число плоскостей симметрии в кубе равно 9.

2.4. Сколько осей симметрии имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб; в)* октаэдр; г)* икосаэдр; д)* додекаэдр (рис. 2)?

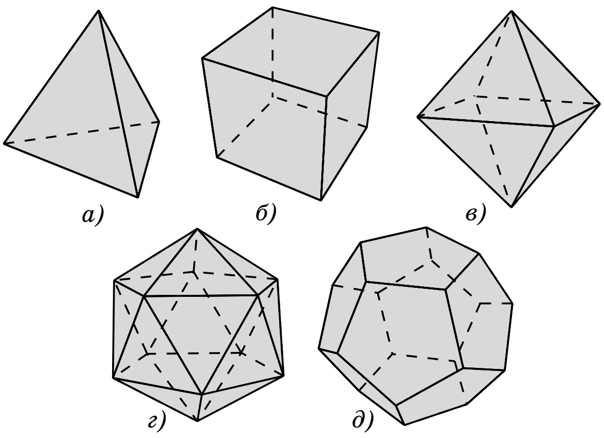

Рис. 2

Р е ш е н и е. а) Осями симметрии правильного тетраэдра являются прямые, проходящие через середины противолежащих рёбер. Число таких прямых равно 3; б) как было показано ранее, число осей симметрии куба равно 9; в)* осями симметрии октаэдра являются прямые, проходящие через противолежащие вершины, а также прямые, проходящие через середины противолежащих рёбер. Общее число таких прямых равно 9; г)* осями симметрии икосаэдра являются прямые, проходящие через середины противолежащих рёбер. Число таких прямых равно 15; д)* осями симметрии додекаэдра являются прямые, проходящие через середины противолежащих рёбер. Число таких прямых равно 15.

2.5. Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр (рис. 2)?

Решение. а) Плоскостями симметрии правильного тетраэдра являются плоскости, проходящие через его рёбра и середины противолежащих рёбер. Число таких плоскостей равно 6; б) как было показано ранее, число плоскостей симметрии куба равно 9; в)* плоскостями симметрии октаэдра являются плоскости, проходящие через противолежащие рёбра, а также плоскости, проходящие через середины противолежащих рёбер и перпендикулярные плоскости, в которой лежат эти рёбра. Общее число таких плоскостей равно 9; г)* плоскостями симметрии икосаэдра являются плоскости, проходящие через противолежащие рёбра. Число таких плоскостей равно 15; д)* плоскостями симметрии додекаэдра являются плоскости, проходящие через противолежащие рёбра. Число таких плоскостей равно 15.

2.6*. Докажите, что у любого многогранника число граней с нечётным числом сторон чётно.

Решение. Предположим, что число граней с нечётным числом сторон нечётно. Тогда общее число сторон в этих гранях будет нечётным. Общее число сторон в гранях с чётным числом сторон чётно. Поэтому число сторон всех граней будет нечётно. Однако каждое ребро многогранника является стороной ровно двух граней. При подсчёте сторон, входящих в грани, мы считали каждое ребро дважды, то есть число всех сторон должно быть чётным. Противоречие. Следовательно, число граней с нечётным числом сторон должно быть чётно.

2.7*. Докажите, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечётное число рёбер, чётно.

Решение. Каждое ребро многогранника соединяет две его вершины. Поэтому суммарное число рёбер, выходящих из вершин многогранника, чётно. Следовательно, число нечётных слагаемых в этой сумме должно быть чётным.

2.8*. Докажите, что для числа вершин (В), числа рёбер (Р) и числа граней (Г) многогранника выполняются неравенства: 3В ≤ 2Р, 3Г ≤ 2Р.

Решение. В каждой вершине многогранника сходятся, по крайней мере, три ребра. Так как число рёбер, выходящих из всех вершин равно удвоенному числу рёбер многогранника, то выполняется неравенство 3В ≤ 2Р. Аналогично, каждая грань многогранника имеет, по крайней мере, три стороны. Так как число сторон во всех гранях равно удвоенному числу рёбер многогранника, то выполняется неравенство 3Г ≤ 2Р.

2.9*. Докажите, что у любого многогранника найдутся, по крайней мере, две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Рассмотрим грань многогранника с наибольшим числом сторон. Обозначим это число сторон n. К этой грани примыкают n граней, числа сторон которых могут быть 3, ..., n. Таких чисел $n - 2$. Следовательно, среди этих n граней найдутся грани, имеющие одинаковое число сторон.

2.10*. Докажите, что у любого многогранника есть, по крайней мере, две вершины, в которых сходится одинаковое число рёбер.

Решение. Рассмотрим вершину многогранника с наибольшим числом рёбер. Обозначим это число рёбер n. Концами этих рёбер являются n вершин. Числа рёбер, выходящих из этих вершин, могут быть 3, ..., n. Таких чисел $n - 2$. Следовательно, среди этих n вершин найдутся вершины, в которых сходится одинаковое число рёбер.

3. Теорема Эйлера

Решение большого класса комбинаторных задач по геометрии основывается на теореме Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$В - Р + Г = 2,$$

где В — число вершин, Р — число рёбер, Г — число граней данного многогранника.

Доказательство этой теоремы можно посмотреть, например, в учебнике [1] или в книге [4].

Приведём несколько задач на применение теоремы Эйлера.

3.1. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин (В) и граней (Г), если он имеет: а) 6 рёбер; б) 12 рёбер; в) 30 рёбер?

Р е ш е н и е. Так как гранями являются только треугольники, то имеет место равенство 3Г = 2Р. По теореме Эйлера имеет место равенство 3В – 3Р + 3Г = 6, из которого вытекает равенство 3В = Р + 6. Следовательно: а) В = 4, Г = 4; б) В = 6, Г = 8; в) В = 12, Г = 20. Примерами таких многогранников являются: а) тетраэдр (рис. 2, а); октаэдр (рис. 2, б); в) икосаэдр (рис. 2, в).

3.2. Гранями выпуклого многогранника являются только четырёхугольники. Сколько у него вершин и граней, если число рёбер равно 12?

Р е ш е н и е аналогично предыдущему. Так как гранями являются только четырёхугольники, то имеет место равенство 4Г = 2Р. По теореме Эйлера имеет место равенство 4В – 4Р + 4Г = 8, из которого вытекает равенство 2В = Р + 4. Следовательно, В = 8, Г = 6. Примером такого многогранника является куб (рис. 2, г).

3.3. Гранями выпуклого многогранника являются только пятиугольники. Сколько у него вершин и граней, если число рёбер равно 30?

Р е ш е н и е аналогично предыдущему. Так как гранями являются только пятиугольники, то имеет место равенство 5Г = 2Р. По теореме Эйлера имеет место равенство 5В – 5Р + 5Г = 10, из которого вытекает равенство 5В = 3Р + 10. Следовательно, В = 20, Г = 12. Примером такого многогранника является додекаэдр (рис. 2, д).

3.4. В каждой вершины выпуклого многогранника сходится три ребра. Сколько он имеет рёбер (Р) и граней (Г), если число вершин (В) равно 20?

Р е ш е н и е. Так как в каждой вершины многогранника сходится три ребра, то 3В = 2Р. По теореме Эйлера имеет место равенство 6В – 6Р + 6Г = 12, из которого вытекают равенства 6Г = 2Р + 12 = 3В + 12. Значит, Г = 12, Р = 30. Примером такого многогранника является додекаэдр (рис. 2, д).

3.5. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно 12?

Р е ш е н и е аналогично предыдущему. Так как в каждой вершины многогранника сходится четыре ребра, то 4В = 2Р. По теореме Эйлера имеет место равенство 4В – 4Р + 4Г = 8, из которого вытекает равенство 4Г = 2Р + 8. Следовательно, Г = 8, В = 6. Примером такого многогранника является октаэдр (рис. 2, б).

3.6. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится пять треугольников. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г)?

Р е ш е н и е. Имеют место равенства: 5В = 2Р, 3Г = 2Р. По теореме Эйлера имеет место равенство 15В – 15Р + 15Г = 30, из которого вытекает равенство Р = 30. Следовательно, В = 12, Г = 20. Примером такого многогранника является икосаэдр (рис. 2, в).

3.7. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится три пятиугольника. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г)?

Р е ш е н и е аналогично предыдущему. Имеют место равенства: 3В = 2Р, 5Г = 2Р. По теореме Эйлера имеет место равенство 15В – 15Р + 15Г = 30, из которого вытекает равенство Р = 30. Следовательно, В = 20, Г = 12. Примером такого многогранника является додекаэдр (рис. 2, д).

3.8. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится два треугольника и два: а) четырёхугольника; б) пятиугольника. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г)?

Р е ш е н и е. Рассмотрим случай а). Обозначим $Г_3$, $Г_4$ — числа треугольных и четырёхугольных граней соответственно. Тогда $Г = Г_3 + Г_4$. $3Г_3 = 2В = 4Г_4$, 4В = 2Р. В силу теоремы Эйлера имеет место равенство В – Р + Г = 2. Подставим в него выражения для Р и Г через В.

Получим $В - 2В + \frac{2}{3}В + \frac{1}{2}В = 2$. Откуда находим В = 12, Р = 24, $Г_3 = 8$, $Г_4 = 6$, Г = 14. Один из таких многогранников показан на рисунке 3, а.

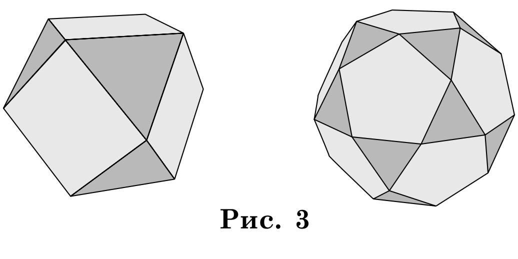

Рис. 3

Аналогичным образом рассматривается случай б). Обозначим $Г_3$, $Г_5$ — числа треугольных и пятиугольных граней соответственно. Тогда $Г = Г_3 + Г_5$. $3Г_3 = 2В = 5Г_5$, 4В = 2Р. В силу теоремы Эйлера имеет место равенство В – Р + Г = 2. Подставим в него выражения для Р и Г

через В. Получим $В^{\circ} - 2В + \frac{2}{3}В + \frac{2}{5}В = 2$.

Откуда находим В = 30, Р = 60, $Г_3 = 20$, $Г_5 = 12$, Г = 32. Один из таких многогранников показан на рисунке 3, б.

3.9. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится четыре треугольника и: а) четырёхугольник; б) пятиугольник. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г)?

Р е ш е н и е аналогично предыдущему. Рассмотрим случай а). Обозначим $Г_3$, $Г_4$ — числа треугольных и четырёхугольных граней соответственно. Тогда $Г = Г_3 + Г_4$. $3Г_3 = 4В$, $4Г_4 = В$, 5В = 2Р. В силу теоремы Эйлера имеет место равенство В – Р + Г = 2. Подставим в него выражения для Р и Г через В. Получим

$В^{\circ} - \frac{5}{2}В + \frac{4}{3}В + \frac{1}{4}В = 2$. Откуда находим

В = 24, Р = 60, Г = 38. Рассмотрим случай б). Обозначим $Г_3$, $Г_5$ — числа треугольных и пятиугольных граней соответственно. Тогда $Г = Г_3 + Г_5$. $3Г_3 = 4В$, $5Г_5 = В$, 5В = 2Р. В силу теоремы Эйлера имеет место равенство В – Р + Г = 2. Подставим в него выражения для Р и Г через

В. Получим $В^{\circ} - \frac{5}{2}В + \frac{4}{3}В + \frac{1}{5}В = 2$. Откуда находим В = 60, Р = 150, Г = 92. Примеры таких многогранников показаны на рисунке 4.

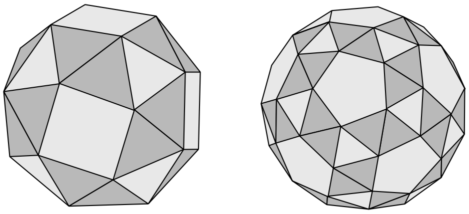

Рис. 4

3.10. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится треугольник, два четырёхугольника и пятиугольник. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г)?

Р е ш е н и е аналогично предыдущему. Обозначим $Г_3$, $Г_4$, $Г_5$ — числа треугольных, четырёхугольных и пятиугольных граней соответственно. Тогда $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5$. $3Г_3 = В$, $4Г_4 = 2В$, $5Г_5 = В$, $4В = 2Р$. В силу теоремы Эйлера имеет место равенство $В - Р + Г = 2$. Подставим в него выражения для Р и Г через В. Получим

$В^\circ - 2В + \frac{1}{3}В + \frac{1}{2}В + \frac{1}{5}В = 2$. Откуда находим $В = 60$, $Р = 120$, $Г = 62$. Пример такого многогранника показан на рисунке 5.

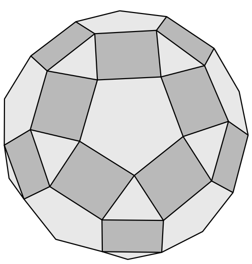

Рис. 5

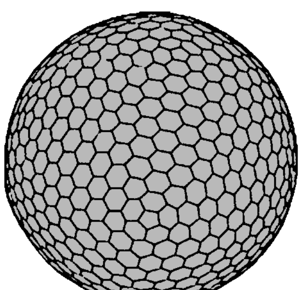

Рис. 6

3.11*. Докажите, что для числа вершин В и числа граней Г выпуклого многогранника выполняются неравенства $В + 4 \le 2Г \le 4В - 8$.

Р е ш е н и е. В силу соотношения Эйлера, имеем $2Г = 4 - 2В + 2Р$. Воспользуемся неравенствами $2Р \ge 3В$ и $2Р \ge 3Г$ из задачи 2.7. Получим $2Г = 4 - 2В + 2Р \ge 4 - 2В + 3В = 4 + В$; $2Г = 4 - 2В + 2Р \ge 4 - 2В + 3Г$ и, следовательно, $Г \le 2В - 4$.

3.12*. Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходятся три ребра.

Р е ш е н и е. Обозначим $Г_n$ — число n-угольных граней, $В_n$ — число вершин, в которых сходится n рёбер. Предположим, что $Г_3 = 0$, $В_3 = 0$. Тогда

$$2Р = 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots \ge 4Г,\ 2Р = 4В_4 + 5В_5 + \ldots \ge 4В.$$

Следовательно, будет выполняться неравенство $4В - 4Р + 4Г \le 0$, что противоречит соотношению Эйлера. Поэтому или $Г_3 \ne 0$, или $В_3 \ne 0$.

3.13*. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдётся грань, у которой менее шести сторон.

Р е ш е н и е. Предположим, что грани выпуклого многогранника имеют более пяти сторон. Тогда

$$2Р = 6Г_6 + 7Г_7 + \ldots \ge 6Г,\ 2Р = 3В_3 + 4В_4 + \ldots \ge 3В.$$

Следовательно, $6В - 6Р + 6Г \le 2Р - 6Р + 4Р = 0$, что противоречит соотношению Эйлера.

3.14*. Гранями выпуклого многогранника являются пятиугольники и шестиугольники, а в каждой вершине сходится три ребра (рис. 6). Сколько у него пятиугольных граней?

Р е ш е н и е. Пусть $Г_5$ и $Г_6$ — число пятиугольных и шестиугольных граней соответственно. Тогда $Г = Г_5 + Г_6$. Так как в каждой вершине сходится три ребра, то $3В = 2Р$. Кроме того, $2Р = 5Г_5 + 6Г_6$.

По теореме Эйлера 6В – 6Р + 6Г = 12, значит, 6Г – 2Р = 12. Следовательно, $6Г_5 + 6Г_6 - (5Г_5 + 6Г_6) = 12$, значит, $Г_5 = 12$.

Литература

1. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Комбинаторные задачи по геометрии. 7–9 классы // Математика в школе. — 2023, — №

2. *Смирнова И М., Смирнов В.А.* Геометрия: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). — М.: Мнемозина, 2019.

3. *Шклярский Д.О.* и др. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.

4. *Шашкин Ю.А.* Эйлерова характеристика. — М.: Наука, 1984.

Статья поступила в редакцию 29.06.2022

Принята к публикации 18.01.2023