Аксиоматика школьного курса геометрии

Одной из важных проблем построения курса геометрии для школы является создание такой аксиоматики, которая была бы пригодна для первоначального изучения геометрии. При этом основным принципом, на котором должна строиться такая аксиоматика, является принцип *элементарности.*

В математике условно можно выделить элементарную часть, в которую не входят, в частности, понятия предела, непрерывности, производной, интеграла и т. д., характерные для высшей математики. Например, использование понятия расстояния между точками или понятие длины отрезка, начиная с самых первых шагов изучения геометрии, не отвечает принципу элементарности, поскольку опирается на понятие действительного числа, которое не является элементарным и изучается в курсе высшей математики. Также не отвечает этому принципу использование в школьной аксиоматике понятий движения или наложения.

Нашим глубоким убеждением является то, что аксиоматический курс геометрии не является трудным для понимания школьников. Аксиомы можно рассматривать как правила игры в геометрию. Если правила чётко определены, то играть по ним легче, чем при отсутствии правил. Такое построение характерно не только для геометрии. Каждая наука имеет свои определённые правила. В жизни часто приходится иметь дело с теми или иными правилами. Например, различные игры (шахматы и др.) основываются на некоторых правилах. При работе с компьютером руководствуются определёнными правилами. Свод законов, регулирующих деятельность человека в той или иной области, также представляет собой набор правил.

Здесь мы рассмотрим аксиоматику геометрии, реализованную в учебнике [1] и отвечающую принципу элементарности.

К числу основных геометрических фигур в этой аксиоматике относятся *точка, прямая* и *плоскость*.

Первые аксиомы относятся к понятию принадлежности.

Через любые две точки проходит единственная прямая.

Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой и точки, ей не принадлежащие.

Одним из основных отношений взаимного расположения точек на прямой является отношение *лежать между*. Точки на прямой могут лежать между двумя данными точками на этой прямой или не лежать между ними. Если точка O лежит между точками A и B, то в этом случае говорят также, что точки A и B лежат на прямой по разные стороны от точки O. В противном случае говорят, что точки A и B лежат на прямой по одну сторону от точки O.

В качестве аксиом взаимного расположения точек на прямой примем следующие свойства.

Из трёх точек на прямой только одна лежит между двумя другими.

Каждая точка на прямой разбивает эту прямую на две части так, что точки из разных частей лежат по разные стороны от данной точки, а точки из одной части лежат по одну сторону от данной точки.

Часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними, называется отрезком. При этом сами данные точки называются концами отрезка.

Часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от неё по одну сторону, называется *полупрямой*, или *лучом*. При этом сама данная точка называется *началом*, или *вершиной луча.*

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция *откладывания данного отрезка* на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется равным исходному отрезку. Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB=A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например AB, отложить на луче A_1B_1 от точки A_1, то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1.

Если при откладывании отрезка AB на луче A_1B_1 от точки A_1 точка B переходит в точку, лежащую между точками A_1, B_1, то говорят, что отрезок AB меньше отрезка A_1B_1 и обозначают $AB < A_1B_1$. Говорят также, что отрезок A_1B_1 больше отрезка AB и обозначают $A_1B_1 > AB$.

Если на отрезке AB между точками A и B взять какую-либо точку C, то образуется два новых отрезка AC и CB. Отрезок AB называется *суммой отрезков* AC и CB и обозначается

$$AB = AC + CB.$$

Каждый из отрезков AC и CB называется *разностью* отрезка AB и другого отрезка, обозначается

$$AC = AB - CB, \; CB = AB - AC.$$

Чтобы сложить два произвольных отрезка AB и CD, продолжим отрезок AB за точку B и на этом продолжении отложим отрезок BE, равный CD. Отрезок AE даст сумму отрезков AB и CD,

$$AE = AB + CD.$$

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего отрезка меньшего.

Следующие свойства, относящиеся к понятию равенства отрезков, принимаются за аксиомы.

Каждый отрезок равен самому себе.

Если два отрезка равны третьему, то они равны между собой.

На любом луче от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному.

Отрезки, полученные сложением или вычитанием соответственно равных отрезков, равны.

Используя операцию сложения отрезка с самим собой, можно определить операцию умножения отрезка на натуральное число. А именно, положим для отрезка AB

$$2AB = AB + AB, \; 3AB = 2AB + AB, \; \dots, \; nAB = (n-1)AB + AB, \; \dots .$$

Определим также операцию *деления отрезка* на натуральное число, или, что то же самое, операцию деления отрезка на n равных частей, считая $AB:n$ отрезком, при умножении которого на n получается исходный отрезок AB, т. е. $n(AB:n) = AB$.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Любой отрезок можно разделить на n равных частей, $n = 2, 3, \ldots$.

Следующее свойство принимается в качестве аксиомы взаимного расположения точек на плоскости относительно данной прямой.

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части, для точек которых говорят, что они лежат по разные стороны от данной прямой. При этом, если две точки, принадлежат разным частям плоскости относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Часть плоскости, состоящую из точек данной прямой и точек, лежащих по одну сторону от этой прямой, называется *полуплоскостью*.

Два луча с общей вершиной также разбивают плоскость на две части. Если лучи не лежат на одной прямой, то меньшая из этих частей является общей частью двух полуплоскостей, определяемых данными лучами.

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется *углом*. Общая вершина называется *вершиной угла*, а сами лучи - *сторонами угла*. Точки угла, не принадлежащие его сторонам, называются *внутренними*. Лучи, исходящие из вершины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются внутренними.

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция *откладывания данного угла* в ту или другую сторону от данного луча. Получающийся при этом угол называется равным исходному углу. Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например AOB, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1, то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч, лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$ и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$. Говорят также, что угол $A_1O_1B_1$ больше угла AOB и обозначают $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$.

Если внутри угла AOB провести луч OC, то образуется два новых угла AOC и COB. Угол AOB называется *суммой углов* AOC и COB и обозначается

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Каждый из углов AOC и COB называется *разностью* угла AOB и другого угла, обозначается

$$\angle AOC = \angle AOB - \angle COB, \quad \angle COB = \angle AOB - \angle AOC.$$

Чтобы сложить два угла, например AOB и CO_1D, отложим угол CO_1D от луча OB так, чтобы точки A и D находились по разные стороны от прямой OB.

Обозначим OE луч, в который перейдёт луч O_1D. Тогда угол AOE даст сумму углов AOB и CO_1D,

$$\angle AOE = \angle AOB + \angle CO_1D.$$

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего угла меньшего.

Аксиомами, относящимися к понятию равенства углов, являются следующие:

Каждый угол равен самому себе.

Если два угла равны третьему, то они равны между собой.

От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол, равный данному.

Углы, полученные сложением или вычитанием соответственно равных углов, равны.

Все развёрнутые углы равны.

Используя эти аксиомы, докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Вертикальные углы равны.

Доказательство. Пусть AOC и BOD - вертикальные углы. Стороны OB и OD угла BOD дополняют до прямых стороны соответственно OA и OC угла AOC. Тогда углы AOC и COB составляют в сумме развёрнутый угол. Углы BOD и COB также составляют в сумме развёрнутый угол. Поскольку все развёрнутые углы равны, то имеем равенство $\angle AOC+\angle COB = \angle BOD+\angle COB$. Вычитая из обеих частей этого равенства $\angle COB$, получаем требуемое равенство $\angle AOC = \angle BOD$.

Это первая теорема и первое доказательство. В дальнейшем будет много теорем и доказательств. Ученикам нужно постараться понять доказательство. Выученное доказательство не означает его понимание. Важны не сами слова, а их смысл. Один и тот же смысл может выражаться различными словами. Например, теорему о равенстве вертикальных углов можно переформулировать в виде: «Если два угла являются вертикальными, то они равны». Это тоже правильная формулировка. Для того, чтобы проверить понимание доказательства, нужно чаще задавать вопрос: «Почему?»

Используя операцию сложения угла с самим собой, можно определить операцию умножения угла на натуральное число и деления угла на n равных частей. Для угла AOB углом $AOB:n$ считается такой угол, при умножении которого на n получается исходный угол AOB, т. е. $n(\angle AOB:n) = \angle AOB$.

В качестве аксиомы принимается следующее свойство.

Любой угол можно разделить на n равных частей, $n = 2, 3, \ldots$

Два треугольника назовём равными, если стороны одного соответственно равны сторонам другого и углы, заключённые между соответственно равными сторонами, равны.

В качестве аксиомы примем следующее свойство.

Каковы бы ни были треугольник и луч на плоскости, существует треугольник, равный данному, у которого первая вершина совпадает с *вершиной луча, вторая – лежит на луче, а третья расположена в заданной полуплоскости относительно луча.*

На основании этой аксиомы обычным образом доказываются признаки равенства треугольников и решаются задачи.

Заметим, что до этого момента при изложении геометрии не использовалась аксиома параллельных. Все теоремы носили абсолютный характер, т. е. относились к абсолютной геометрии, не использующей аксиомы параллельных. Аксиома параллельных вводится в начале восьмого класса и формулируется в виде:

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Таким образом, аксиома параллельных вводится не сразу. Сначала излагается абсолютная геометрия, а только затем - геометрия, использующая аксиому параллельных.

Это позволяет более чётко разделить утверждения, использующие аксиому параллельных и утверждения, её не использующие. Например, без использования аксиомы параллельных доказываются признаки равенства треугольников, свойства равнобедренного треугольника, соотношения между сторонами и углами треугольника, свойство внешнего угла треугольника, свойства серединного перпендикуляра и биссектрисы угла, теоремы о взаимном расположении двух окружностей и прямой и окружности и др. После введения аксиомы параллельных доказываются признаки параллелограмма, теорема о сумме углов треугольника, свойства средней линии треугольника, теорема Фалеса, признаки подобия треугольников и т. д.

Важность такого разделения геометрии обусловлена тем, что оно формирует правильную интуицию и даёт возможность на её основе в дальнейшем изучать различные неевклидовы геометрии: геометрию Лобачевского, проективную геометрию и др.

Завершает аксиомы планиметрии один из вариантов аксиомы непрерывности. К этому времени учащиеся уже имеют более полное представление о действительных числах.

Соответствие, при котором точкам координатной прямой сопоставляются их координаты, является взаимно однозначным соответствием между точками координатной прямой и действительными числами.

Помимо аксиом планиметрии имеются следующие аксиомы стереометрии:

Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.

Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.

Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Существуют, по крайней мере, четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Отметим, что приведённая система аксиом является избыточной в том смысле, что некоторые последующие аксиомы перекрывают предыдущие. Например, из аксиомы об откладывании треугольника, равного данному, и признаков равенства треугольников следует, что все развёрнутые углы равны. Тем не менее, мы предпочли сформулировать аксиому о равенстве развёрнутых углов отдельно, поскольку она используется в самой первой теореме о равенстве вертикальных углов. Кроме этого, на её основе строится процесс измерения величин углов.

То, что отрезок можно разделить на *n* равных частей, является следствием аксиомы непрерывности или аксиомы параллельности. Мы предпочли принять это свойство в качестве самостоятельной аксиомы, поскольку оно существенным образом используется при измерении длин отрезков, различных доказательствах и построениях.

Литература

1. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2014.