ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова,
МПГУ (Москв),
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov, I.M. Smirnova,
MSPU (Moscow),
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: равнобедренный треугольник, свойства равнобедренного треугольника, признаки равенства треугольников.

Key words: isosceles triangle, properties of an isosceles triangle, signs of equality of triangles.

Аннотация: в работе анализируются различные доказательства свойства равнобедренного треугольника, предлагаемые в школьных учебниках геометрии, с точки зрения их строгости и доступности.

Abstract: in this paper, we analyze various proofs of the isosceles triangle property proposed in school textbooks of geometry, in terms of their rigor and accessibility.

В данной работе речь пойдёт о следующем свойстве равнобедренного треугольника: *в равнобедренном треугольнике углы при основании равны*. Оно используется при доказательствах многих важных теорем геометрии. Среди них отметим такие теоремы.

Теорема 1. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Теорема 2. Против большей стороны треугольника лежит больший угол и против большего угла лежит бóльшая сторона.

Теорема 3 (неравенство треугольника). Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

В разных школьных учебниках геометрии предлагаются различные доказательства указанного свойства равнобедренного треугольника.

Рассмотрим сначала доказательство Евклида [1].

Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Докажем, что угол A равен углу B.

На продолжении сторон CA и CB отложим соответственно равные отрезки AD и BE. Проведём отрезки AE и BD (рис. 1).

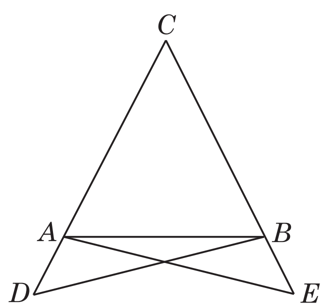

Рис. 1

Треугольники CAE и CBD равны по двум сторонам и углу между ними ($AC = BC$, $CE = CD$, угол C – общий). Следовательно, $AE = BD$, $\angle AEC = \angle BDC$, $\angle CAE = \angle CBD$. Треугольники ABE и BAD равны по двум сторонам и углу между ними ($BE = AD$, $AE = BD$, $\angle E = \angle D$). Следовательно, $\angle BAE = \angle ABD$. Таким образом, имеют место равенства: $\angle CAE = \angle CBD$, $\angle BAE = \angle ABD$. Вычитая из первого равенства второе, получаем требуемое равенство $\angle CAB = \angle CBA$.

Это доказательство представляется довольно сложным для начала изучения геометрии в седьмом классе и его нет ни в одном школьном учебнике геометрии.

Приведём доказательство этого свойства из учебника [2].

Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Докажем, что угол A равен углу B.

Треугольник CAB равен треугольнику CBA по первому признаку равенства тре-угольников. Действительно, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle B$.

Такое же доказательство приведено в книге [3].

Отметим, что это доказательство намного короче доказательства Евклида и не требует дополнительных построений. В некотором смысле его можно рассматривать как вырождение доказательства Евклида для случая, когда точка D совпадает с точкой A, а точка E совпадает с точкой B.

Хотя это доказательство и является строгим, оно похоже на фокус. Мы поразному обозначаем один и тот же треугольник и формально применяем признак равенства треугольников. Именно поэтому оно не нравится многим учителям, которые предпочитают доказательство, приведённое в учебнике [4].

Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Проведём биссектрису CD (рис. 2).

Треугольники ADC и BDC равны по первому признаку равенства треугольников ($AC = BC$, CD – общая сторона, $\angle ACD = \angle BCD$). Следовательно, $\angle A = \angle B$.

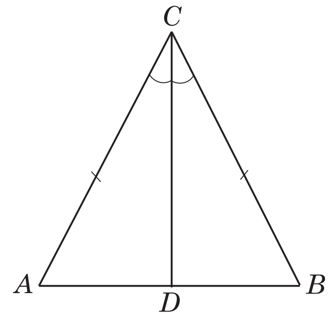

Рис. 2

На первый взгляд, это доказательство имеет преимущество по сравнению с приведёнными выше. Оно не такое сложное, как в книге [1], и не такое формальное, как в учебнике [2]. Тем не менее к нему имеется вопрос: «Почему существует биссектриса?» В учебнике [4] ответ на него даёт следующее построение биссектрисы угла.

Пусть дан угол с вершиной O и сторонами a, b. Опишем окружность с центром в O и каким-нибудь радиусом R. Обозначим буквами A и B точки пересечения этой окружности со сторонами угла соответственно a и b (рис. 3).

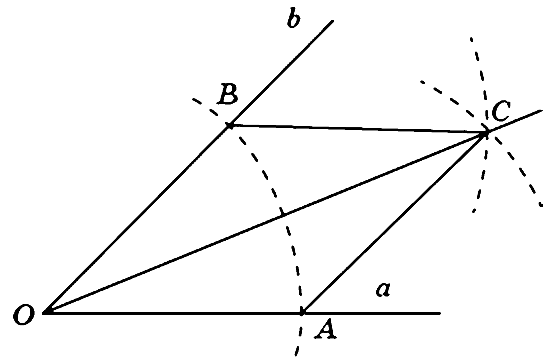

Рис. 3

С центрами в точках A и B опишем окружности с тем же радиусом R. Обозначим буквой C точку пересечения этих окружностей, отличную от O. Так как треугольники OAC и OBC равны по трём сторонам, то углы AOC и BOC равны. Следовательно, луч OC будет искомой биссектрисой данного угла.

В этом построении используется признак равенства треугольников по трём сторонам. Посмотрим, как он доказывается в учебнике [4].

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 4).

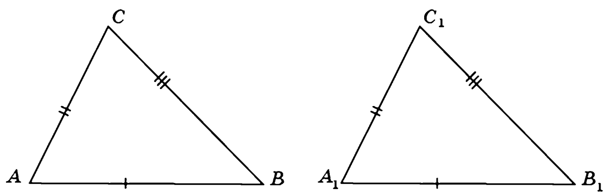

Рис. 4

Докажем, что эти треугольники равны. Для этого отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 5).

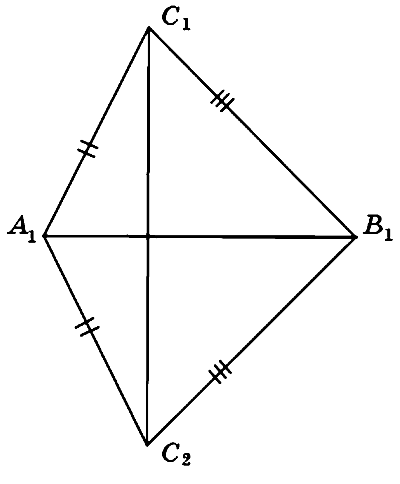

Рис. 5

Тогда треугольник $A_1B_1C_2$ будет равен треугольнику ABC. При этом луч C_1C_2 может лежать внутри угла $A_1C_1B_1$, совпадать с одной из его сторон или лежать вне этого угла. Рассмотрим первый из этих случаев (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ – равнобедренный, значит, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Аналогично, из равенства сторон B_1C_1 и B_1C_2 следует, что треугольник $C_1B_1C_2$ – равнобедренный, значит, $\angle B_1C_1C_2 = \angle B_1C_2C_1$. Складывая равные углы, получаем, что угол $A_1C_1B_1$ равен углу $A_1C_2B_1$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Мы видим, что в этом доказательстве используется свойство равнобедренного треугольника. Значит, в доказательстве свойства равнобедренного треугольника имеется «порочный круг». При доказательстве этого свойства используется существование биссектрисы, для построения биссектрисы используется третий признак равенства треугольников, доказательство которого, в свою очередь, использует это свойство равнобедренного треугольника.

Вместо проведения биссектрисы CD при доказательстве свойства равнобедренного треугольника ABC можно было бы попробовать провести медиану CM. Однако в этом случае для доказательства равенства углов A и B пришлось бы применять третий признак равенства треугольников, доказательство которого, как мы видели выше, опирается на данное свойство равнобедренного треугольника. Таким образом, мы вновь находились бы в «порочном круге».

Вместо проведения медианы CM равнобедренного треугольника ABC можно было бы попробовать провести высоту CH. Однако в этом случае для доказательства равенства углов A и B пришлось бы применять признак равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе, доказательство которого также опирается на данное свойство равнобедренного треугольника [4]. Мы опять оказались бы в «порочном круге».

Таким образом, чтобы в доказательстве свойства равнобедренного треугольника не было «порочного круга», нужно или использовать доказательство учебника [2], или принять существование биссектрисы угла без доказательства и использовать доказательство учебника [4].

Литература

1. Начала Евклида. Книги I–VI. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

2. *Погорелов А.В.* Геометрия. 7–11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.

3. *Перепелкин Д.И.* Курс элементарной геометрии. Часть I. Геометрия на плоскости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

4. *Атанасян Л.С. и др.* Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.